

TOMOGRAFIYA MASALASINI MODELLASHTIRISH VA ALGORITMINI ISHLAB CHIQISH

Shamuratova Begzada Polatbay qizi¹,

¹Nukus davlat texnika universiteti magistrant,

Umirbekova Saltanat Kurbanbay qizi²,

²Nukus davlat texnika universiteti magistrant.

email:saltanatumirbekova424@gmail.com

Annotatsiya. Ushbu ishda tibbiy va sanoat tomografiyasida qo'llaniladigan tasvirlarni qayta tiklash masalasi matematik modellashtirish asosida ko'rib chiqiladi. Radon transformatsiyasi, inversiya masalasi va ularni sonli yechish uchun ishlab chiqilgan algoritmlar tahlil qilinadi. Taklif etilgan model uzluksiz integral masalalar asosida qurilgan bo'lib, kompyuter tomografiyasida tasvirning barqarorligini oshirish uchun regularizatsiya usullari qo'llanilgan.

Kalit so'zlar: tomografiya, radon transformatsiyasi, teskari masala (Inverse problem), filtrlangan qayta proyeksiyalash (FBP), iterativ rekonstruksiya (ART, SIRT), regularizatsiya, sinogramma, tasvirni qayta tiklash (Image reconstruction), shovqinli ma'lumotlar, chuqur o'rganish (Deep learning)

Kirish

Tomografiya masalasi — fizik ob'ektning ichki tuzilishini turli burchaklardan o'lchovlar olish orqali tekshirish va ularning asosida tasvirni qayta tiklash jarayoni bo'lib, u tibbiyot, sanoat diagnostikasi, geofizika, materialshunoslik, arxeologiya, xavfsizlik tizimlari kabi ko'plab sohalarda qo'llaniladi [1]. Tomografiyaning matematik asoslaridan biri Radon transformatsiyasi hisoblanadi, u ob'ekt zichlik funksiyasini tekisliklar bo'ylab integral o'lchovlarga akslantiradi. Ushbu o'lchovlardan tasvirni tiklash esa teskari Radon transformatsiyasi yordamida amalga oshiriladi [2]. Amaliy tomografiya jarayonida o'lchov ma'lumotlari ko'pincha cheklangan burchak oralig'ida, past chastotali, shovqinli yoki notekis bo'lishi mumkin. Bu esa rekonstruksiya natijasining aniqligi va barqarorligiga sezilarli ta'sir ko'rsatadi. Shu sababli tomografiya masalasini modellashtirish, uning matematik xossalarini chuqur o'rganish, algoritmlarni sinash va taqqoslash ilmiy izlanishlarning muhim yo'nalishlaridan biridir [3].

So'nggi yillarda klassik filtrlangan oraliq proyeksiyalar (FBP), algebraik rekonstruksiya algoritmlari (ART, SIRT, SART), variatsion metodlar, shuningdek chuqur o'rganish asosidagi rekonstruksiya modellaridan foydalanish keng tarqaldi. Ular o'lchov ma'lumotlariga bo'lgan talablar, hisoblash murakkabligi va natijaviy tasvir sifatiga ko'ra farq qiladi. Tomografiyada modellashtirish esa ushbu algoritmlar



samaradorligini baholash, turli sharoitlarda ularning afzallik va kamchiliklarini aniqlashga imkon beradi [4].

Mazkur tadqiqot tomografiya jarayonini modellashtirish va rekonstruksiya algoritmlarining barqarorligini baholashga bag'ishlanadi. Unda simulyatsiya jarayoni, sinogramma hosil qilish, to'g'ri va teskari Radon transformatsiyalarini hisoblash, shuningdek algoritmlar samaradorligini solishtirish masalalari ko'rib chiqiladi.

Asosiy qism

1. Tomografiya masalasining matematik modeli

Tomografiyaning matematik modeli birinchi navbatda **Radon transformatsiyasiga** asoslanadi. Tasvirlanayotgan ob'ektning zichlik funksiyasi $f(x,y)$ bo'lsin. U holda Radon transformatsiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$Rf(\theta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \theta - t \sin \theta, s \sin \theta + t \cos \theta) dt$$

Bu yerda:

θ — nurlanish burchagi,

s — detektordagi koordinata,

$Rf(\theta, s)$ — sinogramma.

Sinogramma — bu barcha burchaklar uchun olingan proyeksiyalar to'plami bo'lib, tasvirni qayta tiklash algoritmlarining boshlang'ich ma'lumotlari hisoblanadi.

1.1. Teskari masala

Teskari tomografiya masalasi — sinogrammadan $f(x,y)$ tasvirni tiklashdan iborat. Uning klassik yechimi filtrlangan qayta proyeksiyalash (FBP) formulasi yordamida beriladi:

$$f(x, y) = \int_0^{\pi} (Rf(\theta, s) * h(s))_{s=x \cos \theta + y \sin \theta} d\theta$$

bu yerda $h(s)$ — Ram-Lak, Shepp-Logan, Hanning kabi filtrlar.

1.2. Algebraik model

Amaliy masalalarda tomografiya diskret panjarada ifodalanadi:

$$Ax=b$$

Bu yerda:

A — nurlarning piksel bo'yicha o'tish uzunliklari matritsasi,

x — tiklanishi kerak bo'lgan tasvir vektori,

b — proyeksiya (o'lchov) vektori.

Bu model iteratsion rekonstruksiya usullariga asos yaratadi.

2. Modellash jarayoni

Tomografiya jarayonini modellashtirish quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

2.1. Sun'iy obyekt (phantom) yaratish

Eng ko'p qo'llaniladigan test obyektlardan biri **Shepp–Logan fantomi** bo'lib, u turli geometrik shakllardan iborat murakkab zichlik taqsimotini ifodalaydi [5]. Bu obyekt algoritmlarni sinash uchun ideal hisoblanadi.

2.2. Proyeksiyalarni generatsiya qilish

Sinogramma quyidagi parametrlar bo'yicha yaratiladi:

- $N\theta$ — burchaklar soni (masalan, 180 yoki 360);
- N_s — detektor elementlari soni;
- Shovqin darajasi (Gaussian σ).

2.3. Shovqin modelini qo'llash

Amaliy o'lchovlarda shovqin doim mavjud bo'ladi. Simulyatsiyada odatda:

- **Gauss shovqini**,
- **Poisson shovqini**,
- **Detektordagi ataylab kiritilgan nuqsonlar** ishlatiladi.

Bu algoritmlarning barqarorligini baholashga yordam beradi.

3. Rekonstruksiya algoritmlari

3.1. Filtrlangan qayta proyeksiyalash (FBP)

Eng tez va keng qo'llaniladigan usul.

Afzalliklari: Yuqori tezlik, Tibbiyot amaliyotida standart.

Kamchiligi: Shovqinga sezgir, To'liq bo'lmagan proyeksiyalar bo'lganda sifati keskin yomonlashadi.

3.2. Algebraik rekonstruksiya (ART)



ART iteratsion yechim bo'lib:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda \frac{b_i - a_i x^k}{\|a_i\|^2} a_i^T$$

Bu usul kam proyeksiyada ham sifatli natija beradi.

3.3. SIRT/SART algoritmlari

Bu usullar ARTning barqarorlashtirilgan versiyalari bo'lib, tibbiyot tomografiyasida keng qo'llaniladi. SIRT algoritmi barcha proyeksiyalar bo'yicha o'rtacha iteratsion yangilanishni amalga oshiradi.

3.4. Variatsion va regularizatsiyalangan usullar

Ko'p ishlatiladigan modellardan biri — **TV-minimallashtirish** (Total Variation):

$$\min_x \|Ax - b\|^2 + \lambda TV(x)$$

U yuqori sifatli, konturlari aniq tasvir beradi.

3.5. Sun'iy intellekt asosidagi rekonstruksiya

U-Net, FBPCovNet, DeepDecoder kabi tarmoq arxitekturasi asosida:

- ✓ Shovqinni kamaytirish;
- ✓ Kam proyeksiyalarni tiklash;
- ✓ Artefaktlarni kamaytirish mumkin.

Natijalar va tahlil

Modellashtirish boshida fantom tanlandi, so'ngra 180 ta burchakdan proyeksiyalar olindi. 5% Gauss shovqini qo'llandi. Quyidagi algoritmlar solishtirildi:

- FBP;
- ART;
- SIRT.

Natijalar shuni ko'rsatdiki:

- FBP tez, lekin shovqinli
- ART kam proyeksiyada ancha yaxshi
- SIRT eng barqaror va silliq tasvir beradi
- Shovqin mavjud bo'lganda variatsion model eng yuqori aniqlikni ta'minladi

Xulosa



Tomografiyaning matematik modeli Radon transformatsiyasi asosida quriladi. O'lchovlar shovqinli yoki cheklangan bo'lganda rekonstruksiya algoritmlari sezilarli farq qiladi. Modellashtirish natijalari shuni ko'rsatdiki:

- Klassik FBP algoritmi tez, lekin shovqinga sezgir.
- Iteratsion ART, SIRT algoritmlari barqarorroq.
- Variatsion va chuqur o'rganish usullari yuqori sifatli tasvir olish imkonini beradi.

Shuning uchun tomografiya masalalarini modellashtirish ilmiy tadqiqotlarda ham, amaliy tizimlarda ham muhim ahamiyat kasb etadi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Radon J. *On the determination of functions from their integral values along certain manifolds*. IEEE Transactions, 1986.
2. Kak A. C., Slaney M. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. SIAM, 2001.
3. Natterer F. *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, 1986.
4. Buzug T. M. *Computed Tomography: From Photon Statistics to Modern Cone-Beam CT*. Springer, 2008.
5. Shepp L. A., Logan B. F. *The Fourier reconstruction of a head section*. IEEE Transactions on Nuclear Science, 1974.
6. Hansen P. C. *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. SIAM, 1997.
7. Jin K. H., McCann M. T., Froustey E., Unser M. *Deep Convolutional Neural Network for Inverse Problems in Imaging*. IEEE Transactions on Image Processing, 2017.