FURYE QATORINING TADBIQI

M.H.Jamolov *Iqtisodiyot va pedagogika universiteti "Matematika" kafedirasi stajyor o'qituvchi,*

G.I.Faxritdinova *Axborot texnologiyasi va menejment unversiteti matematika yunalishi magesteri*

E-mail: jamolovmadamin7@gmail.com

Tel: +998(90)0707996

Annotatsiya*:* Ushbu maqolada Furye qatori nazariyasining asosiy tushunchalari, matematik ifodasi va amaliy qo'llanilishi ko'rib chiqiladi. Furye qatori yordamida davriy funksiyalarni sinus va kosinus funksiyalari yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkinligi tahlil qilinadi. Maqolada Furye koeffitsiyentlarini aniqlash usullari, qatorning yaqinlashish shartlari hamda fizika va texnika sohalaridagi qo'llanilishi yoritilgan. Tadqiqot natijalari Furye qatorining matematik analiz, signalni qayta ishlash va tebranish jarayonlarini o'rganishdagi muhim ahamiyatini ko'rsatadi.

Kalit so'z: Furye qatori, davriy funksiya, sinus va kosinus, Furye koeffitsiyentlari, yaqinlashish, matematik analiz, signalni qayta ishlash.

Ряд Фурье

Аннотация: В данной статье рассматриваются основные понятия теории рядов Фурье, их математическое представление и практическое применение. Показано, что периодические функции могут быть представлены в виде суммы синусов и косинусов. В работе анализируются методы вычисления коэффициентов Фурье, условия сходимости ряда, а также его применение в физике и технических науках. Результаты исследования подтверждают важную роль рядов Фурье в математическом анализе, обработке сигналов и изучении колебательных процессов.

Ключевые слова: ряд Фурье, периодическая функция, синус и косинус, коэффициенты Фурье, сходимость, математический анализ, обработка сигналов.

Fourier Series

Abstract: This article discusses the fundamental concepts of Fourier series theory, its mathematical formulation, and practical applications. It is shown that periodic functions can be represented as a sum of sine and cosine functions. The paper analyzes the methods for determining Fourier coefficients, the convergence conditions of the series, and its applications in physics and engineering. The results highlight the significant role of Fourier series in mathematical analysis, signal processing, and the study of oscillatory processes.

Keywords: Fourier series, periodic function, sine and cosine, Fourier coefficients, convergence, mathematical analysis, signal processing.

Kirish. Matematika fanining muhim bo‘limlaridan biri bo‘lgan matematik analiz real jarayonlarni modellashtirish va ularni chuqur tahlil qilish imkonini beradi. Ayniqsa, tabiat va texnikada uchraydigan ko‘plab hodisalar davriy xarakterga ega bo‘lib, ularni o‘rganish ilm-fan taraqqiyotida muhim ahamiyat kasb etadi. Tebranishlar, to‘lqinlar, elektr va magnit maydonlari, ovoz signallari, issiqlik jarayonlari kabi ko‘plab fizik hodisalar davriy qonuniyatlarga bo‘ysunadi. Bunday jarayonlarni matematik jihatdan ifodalash, ularning xossalarini aniqlash va amaliy masalalarda qo‘llash uchun samarali matematik usullar zarur. Ana shunday universal va qudratli usullardan biri Furye qatori nazariyasidir.

Furye qatori nazariyasi fransuz olimi Jan Batist Jozef Furye tomonidan XIX asr boshlarida issiqlik o‘tkazuvchanligi jarayonlarini tadqiq qilish jarayonida ishlab chiqilgan. Furye o‘z tadqiqotlarida murakkab funksiyalarni oddiy trigonometrik funksiyalar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash mumkinligini ko‘rsatib berdi. Bu g‘oya dastlab katta bahs-munozaralarga sabab bo‘lgan bo‘lsa-da, keyinchalik matematik jihatdan asoslab berildi va zamonaviy matematik analizning ajralmas qismiga aylandi.

Furye qatorining asosiy mohiyati shundan iboratki, ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi har qanday davriy funksiya sinus va kosinus funksiyalarining cheksiz yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlanishi mumkin. Bu esa murakkab shakldagi davriy funksiyalarni oddiy garmonik tebranishlar orqali ifodalash imkonini beradi. Natijada, funksiyani o‘rganish jarayoni ancha soddalashadi, chunki trigonometrik funksiyalar yaxshi o‘rganilgan va ularning xossalari aniq ma’lum.

Davriy funksiyalarni trigonometrik qatorlar yordamida ifodalash nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham katta ahamiyatga ega. Masalan, elektrotexnikada o‘zgaruvchan tok zanjirlarini tahlil qilishda, radiotexnikada signallarni uzatish va qabul qilishda, akustikada tovush to‘lqinlarini o‘rganishda, mexanikada tebranish jarayonlarini tekshirishda Furye qatori keng qo‘llaniladi. Shuningdek, zamonaviy raqamli texnologiyalarda, xususan signal va tasvirlarni qayta ishlash sohasida Furye tahlili asosiy matematik vositalardan biri hisoblanadi.

Furye qatorining muhim jihatlaridan biri — bu uning yaqinlashish xossalaridir. Har qanday funksiya ham Furye qatoriga yoyilavermaydi; buning uchun ma’lum matematik shartlar, xususan Dirixle shartlari bajarilishi lozim. Ushbu shartlarga ko‘ra, funksiya berilgan oraliqda chegaralangan, bo‘lakma-bo‘lak uzluksiz va cheklangan sondagi ekstremum hamda uzilish nuqtalariga ega bo‘lishi kerak. Shu shartlar bajarilganda, Furye qatori funksiyaga yaqinlashadi va uni aniq ifodalab beradi.

Furye qatorining yana bir muhim afzalligi shundaki, u differensial tenglamalarni yechishda samarali usul sifatida xizmat qiladi. Ayniqsa, matematik fizika tenglamalari — issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi, to‘lqin tenglamasi va Laplas tenglamasini yechishda Furye qatorlari keng qo‘llanadi. Bu esa uning nazariy va amaliy ahamiyatini yanada oshiradi.

Zamonaviy ilm-fan va texnologiya taraqqiyoti Furye tahlilining ahamiyatini yanada kuchaytirdi. Raqamli signalni qayta ishlash (DSP), tasvirlarni siqish (masalan, JPEG algoritmi), audio va video ma’lumotlarni kodlash, telekommunikatsiya tizimlari kabi ko‘plab sohalarda Furye g‘oyalari asosiy matematik poydevor vazifasini bajaradi. Bundan tashqari, kvant mexanikasi va optika kabi fundamental fanlarda ham Furye almashtirishlari va qatorlari muhim rol oʻynaydi.

Shu bilan birga, Furye qatori nazariyasi matematik analizning boshqa boʻlimlari bilan ham uzviy bogʻliqdir. U funksional analiz, integral tenglamalar nazariyasi va kompleks analiz bilan chambarchas aloqada rivojlangan. Furye qatorlari ortogonal funksiyalar tizimi tushunchasiga asoslanadi, bu esa matematikada muhim nazariy asoslardan biridir. Ortogonallik xossasi yordamida Furye koeffitsiyentlari aniqlanadi va funksiyaning trigonometrik yoyilmasi hosil qilinadi.

Mazkur mavzuning dolzarbligi shundaki, Furye qatori nafaqat nazariy matematikaning muhim qismi, balki koʻplab amaliy muammolarni hal qilishda ham samarali vosita hisoblanadi. Davriy jarayonlarni chuqur oʻrganish va ularni matematik modellashtirish zamonaviy muhandislik, axborot texnologiyalari va tabiiy fanlarning rivojlanishida muhim omil boʻlib xizmat qiladi.

Ushbu maqolaning maqsadi — Furye qatorining nazariy asoslarini oʻrganish, uning matematik ifodasini keltirish hamda qoʻllanilish sohalarini tahlil qilishdan iborat. Shuningdek, Furye koeffitsiyentlarini aniqlash usullari, qatorning yaqinlashish shartlari va uning amaliy ahamiyati yoritiladi.

Yuqoridagilardan kelib chiqib aytish mumkinki, Furye qatori nazariyasi matematik analizning muhim va dolzarb boʻlimlaridan biri boʻlib, u ilm-fan va texnikaning koʻplab yoʻnalishlarida keng qoʻllaniladi. Ushbu nazariya yordamida murakkab davriy jarayonlarni sodda va tushunarli koʻrinishda ifodalash mumkin boʻlib, bu esa ilmiy tadqiqotlar va amaliy ishlanmalar samaradorligini oshirishga xizmat qiladi.

Mavzuga oid adabiyotlarning sharhi. Furye qatori nazariyasi matematik analizning muhim va chuqur oʻrganilgan boʻlimlaridan biridir. Ushbu mavzu boʻyicha yaratilgan ilmiy adabiyotlarda davriy funksiyalarni trigonometrik qatorlar yordamida ifodalash, ularning yaqinlashish xossalari hamda amaliy qo‘llanilishi keng yoritilgan.

Furye qatori nazariyasining asosiy g‘oyasi shundan iboratki, 2π davrli f(x) funksiya quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \mathrm{cosnx}+\mathrm{b}_n \mathrm{sinnx})$$

bu yerda koeffitsiyentlar:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)cosnxdx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)sinnxdx.$$

Ko‘pgina klassik adabiyotlarda ushbu formulalar trigonometrik funksiyalarning ortogonallik xossasidan kelib chiqib isbot qilinadi. Ortogonallik shartlari quyidagicha:

$$\int_{-\pi}^{\pi}cosmxcosnxdx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}sinmxsinnxdx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \pi, & m=n\end{cases}$$

Ushbu natijalar Furye koeffitsiyentlarini aniqlashning nazariy asosini tashkil etadi.

Klassik misol.Adabiyotlarda ko‘pincha quyidagi funksiya misol sifatida keltiriladi:

$$f(x)=x, \qquad -\pi<x<\pi$$

Bu funksiya toq bo‘lgani sababli a_n=0. Hisoblash natijasida:

$$b_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

Natijada Furye qatori:

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}sinnx$$

Bu misol Furye qatorining amaliy hisoblash mexanizmini ko‘rsatadi.

Dirixle shartlari.Adabiyotlarda Furye qatorining yaqinlashish shartlari ham keng yoritiladi. Dirixle teoremasiga ko‘ra, agar funksiya bo‘lakma-bo‘lak uzluksiz va chekli sondagi uzilish nuqtalariga ega bo‘lsa, Furye qatori uzilish nuqtasida:

$$S(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

qiymatga yaqinlashadi.

Umumiy (2L) davrli Furye qatori.Ko‘plab matematik fizika adabiyotlarida umumiy ko‘rinish qo‘llaniladi:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}dx.$$

Parseval tengligi.Nazariy adabiyotlarda Parseval tengligi muhim o‘rin egallaydi:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\frac{{a_0}^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}({a_n}^2+{b_n}^2)$$

Bu tenglik funksiyaning energiyasi uning Furye koeffitsiyentlari orqali ifodalanishini ko‘rsatadi.

Tadqiqot metodologiyasi. Faraz qilaylik bizaga f(x)=x^2 funksiya berilgan bolib bu funksiya [-π; π] aniqlangan bolsin. Berilgan funksiyani furye qatoriga yoyamiz. Bizaga malumki berilgan funksiya juft funksiya bolgani uchun $b_n=0$ boladi demak biza endi qolgan kaefsentlarini topamiz:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}-\frac{(-\pi)^3}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cosnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2cosnxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,d\frac{sinnx}{n}=$$

$$=\frac{x^2sinnx}{\pi n}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{sinnx}{n}dx^2=\left(\frac{\pi^2sin\pi n}{\pi n}-\frac{(-\pi)^2\sin(-\pi)n}{\pi n}\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}2xsinnxdx=(0\text{-}0)-\frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}2xd\frac{(-cosnx)}{n}=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(xcosnx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}cosnxdx\right)=\frac{2}{\pi n^2}(\pi cosn\pi-(-\pi)\cos(-\pi)\,n)-$$

$$-\frac{2}{\pi n^3} sinnx|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi n^3}(sin\pi n - \sin(-\pi)\, n) =$$

$$= \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi n^3}(0-0) = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2}.$$

Demak $a_n = \frac{4(-1)^n}{\pi n^2}$ shunga teng bular ekan.Bundan kurinadiki Furye qatorimiz quyidagi kurinishga kelar ekan:

$$\mathrm{f(x)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \mathrm{cosnx} + \mathrm{b}_n \mathrm{sinnx})$$

$$x^2 = \frac{2\pi}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi n^2} \mathrm{cosnx}.$$

Tahlil va natijalar. Mazkur tadqiqot davomida davriy funksiyalarni Furye qatori yordamida ifodalash va ularning xossalarini tahlil qilish amalga oshirildi. Tadqiqot natijalari Furye qatorining matematik jihatdan ishonchli va samarali vosita ekanligini ko‘rsatdi.

Birinchidan, Furye qatori trigonometrik funksiyalarning ortogonal tizimiga asoslanadi, bu esa qatorning har bir qismi yagona va aniq bo‘lishini ta’minlaydi. Qismiy yig‘indilar esa funksiyani eng kichik xato bilan yaqinlashtiradi, shuning uchun Furye qatori nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham optimal natija beradi.

Ikkinchidan, tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, funksiyaning juft yoki toq bo‘lishi qatorning tuzilishiga ta’sir qiladi. Juft funksiyalar faqat kosinuslar yig‘indisi sifatida ifodalanadi, toq funksiyalar esa faqat sinuslar yig‘indisidan iborat bo‘ladi. Bu xususiyat Furye qatorining oddiy va murakkab funksiyalarni ajratib ishlash imkonini beradi.

Uchinchidan, Furye qatori Dirixle shartlari ostida funksiyaga yaqinlashadi. Ya’ni, funksiyada uzluksiz nuqtalarda qator funksiya qiymatiga yaqinlashadi, uzilish nuqtalarida esa qator qiymati uzilish oldi va keyingi qiymatlarning o‘rtacha qiymatiga mos keladi. Bu xususiyat Furye qatorini parchalanuvchi yoki sakrashga ega funksiyalarni ham aniqlashda samarali qiladi.

Amaliy misol sifatida, kvadrat funksiyani Furye qatori yordamida yoyish natijasida mashhur matematik yig‘indilarni aniqlash mumkinligi ko‘rsatildi. Shu bilan birga, Furye qatori nafaqat matematik tahlil, balki sonli hisoblash, fizika va muhandislik masalalarida ham qo‘llanilishi mumkinligi isbotlandi.

Umuman olganda, tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, Furye qatori ortogonal trigonometrik tizim asosida funksiyalarni aniq va samarali ifodalash imkonini beradi, qismiy yig‘indilar orqali eng kichik xato bilan yaqinlashadi, va u matematik hamda amaliy masalalarda keng qo‘llanilishi mumkin.

Xulosa va takliflar. Olingan natijalar shuni ko‘rsatdiki, Furye qatori tahlili funksiyaning energetik xossalari va asosiy harmonik komponentalarga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Qatorga qo‘shilgan yuqori tartibli harmoniklar yoki parametrlar soni oshishi bilan funksiya shaklining yaqinlashishi yaxshilanadi, asosiy amplituda va barqaror komponentlar soni o‘zgaradi. Bu esa signal yoki funksiyaning fazaviy tartiblanishini va energiya landshaftining xatti-harakatlarini aniqlashda muhim ahamiyatga ega.

Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, Furye qatori modeli murakkab davriy va diskret tizimlarda funksiyalarni tahlil qilish, fazaviy o‘tishlar va signalni harmonik komponentalarga ajratishda samarali vosita bo‘lib xizmat qiladi.

Kelgusida tadqiqotlarda quyidagilar tavsiya etiladi:

1. Furye qatorini murakkab, uzluksiz yoki tasodifiy signallarga kengaytirish.
2. Kompyuter simulyatsiyalari (MATLAB, Python) orqali yuqori harmoniklar va qator yaqinlashishini batafsil o‘rganish.
3. Analitik yondashuvlar yordamida barqaror harmonik komponentlar va energiya landshaftini chuqur tahlil qilish.
4. Multidimension yoki ko‘p o‘lchovli Furye qatorlarini qo‘llash orqali murakkab fizik va muhandislik tizimlaridagi fazaviy tartiblanishni o‘rganish.

Xulosa sifatida: Furye qatori nafaqat nazariy matematik vosita, balki signalni tahlil qilish, energiya taqsimoti va fazaviy tartiblanishni o‘rganishda samarali va keng qo‘llaniladigan yondashuv ekanligi isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Valery Serov, *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer, 2017 — Furye qatori va almashtirishlar, PDE’larda qo‘llanilishi.

2. C.F. Dunkl & Y. Xu, *Fourier Analysis and Its Applications*, American Mathematical Society — Furye qatorlari, ortogonal tizimlar va ko‘p yo‘nalishli qo‘llanmalar.

3. G.B. Folland, *Fourier analysis and its applications* — Furye analizining matematik asoslari va amaliy qo‘llanilishi.

4. Meyliyev X.J., Eshonqulov J.C., Jamolov.M.X. “Траектории квалрптичние стохастические операторы на лекартного проезвеление S^1*S^1.Scientifik reports of Bukhara State University.79-86 c.

5. M.X.Jamolov. “ Panjara Ustidagi Konfiguratsiyalar ”, Harbiy Aviatsiya institute “ Aniq va tabii fanlarni o‘qitishning dolzarb muammolari va yechimlari ”, konferensiya materiallat to‘plami.2025 y.379-383 b.

6. M.X.Jamolov “ Gibbs O‘lchovlari Panjarali Sistemalarda Qo‘llanilishi ”, “Tadqiqotlar Jahon ilmiy-metodik jurnali”,61(6),162-165 b.

7. Qayumova G. A. Matematika fanini o ‘qitishda talabalarning mustaqil ishlash kompetentsiyani rivojlantirish //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.

8. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O’RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.

9. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA’LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.

10. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA’LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.

11. Abdishukurovna Q. B., Abdushukurovna Q. G. QISQARTIRIB AKS ETTIRISH PRINTSIPINI TADBIQLARI //Лучшие интеллектуальные исследования. – 2026. – Т. 62. – №. 1. – С. 29-35.