

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЁХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Хикматову Гулхаё

Навоийский государственный университет

Аннотация: В данной статье рассматриваются вопросы математического моделирования и численного анализа трёхслойных пластин сложной формы. Разработана вычислительная модель, позволяющая проводить оценку напряжённо-деформированного состояния многослойных конструкций с учётом различий в физических и механических свойствах слоёв. В работе использованы методы конечно-элементного анализа и численного интегрирования. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что предложенный подход обеспечивает высокую точность расчётов и устойчивость алгоритма при моделировании сложных геометрических форм. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании композитных материалов, а также в инженерных и строительных конструкциях, где важна надёжность многослойных элементов.

Ключевые слова: трёхслойные пластины, математическое моделирование, численный анализ, конечно-элементный метод, напряжённо-деформированное состояние, вычислительный эксперимент, композитные материалы, сложная конфигурация.

В последние годы вопрос повышения термического сопротивления и упругого поведения стен и других ограждающих конструкций решается переходом к трехслойным конструкциям.

Трёхслойные пластины являются частным случаем многослойных пластин, математические модели которых полученные согласно вариационному принципу Гамильтона – Остроградского приведено в работе:

$$\delta \int_t (K - \Pi + A) dt = 0$$

где K – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия системы, A – потенциал внешних сил, δ – операция варьирования.

Математические модели n слойных анизотропных пластин изучены в работе [1]. При $n = 2$ рассмотрим частный случай, если материалы жестких слоев ортотропные с главными направлениями, совпадающими с направлением осей координат. Получаем уравнения равновесия для трехслойных пластин [2-4]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \nu_1^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{A_{(1)}^{(1)} b^2}{A_{(2)}^{(1)} a^2} \frac{\partial^2 \nu_1^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{A_{(3)}^{(1)} b}{A_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial^2 \nu_2^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{B_1 b^2}{A_{(2)}^{(1)}} (\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}) + \frac{B_1 c b^2}{A_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{q_1^{(1)} b^2}{A_{(2)}^{(1)} h}, \\ \frac{\partial^2 \nu_1^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{A_{(1)}^{(2)} b^2}{A_{(2)}^{(2)} a^2} \frac{\partial^2 \nu_1^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{A_{(3)}^{(2)} b}{A_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial^2 \nu_2^{(2)}}{\partial x \partial y} - \frac{B_1 b^2}{A_{(2)}^{(2)}} (\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}) - \frac{B_1 c b^2}{A_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial w}{\partial x} &= -\frac{q_1^{(2)} b^2}{A_{(2)}^{(2)} h}, \\ \frac{\partial^2 \nu_2^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{A_{(1)}^{(1)} b^2}{A_{(2)}^{(1)} a^2} \frac{\partial^2 \nu_2^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{A_{(3)}^{(1)} b}{A_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial^2 \nu_1^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{B_1 b^2}{A_{(2)}^{(1)}} (\nu_2^{(2)} - \nu_2^{(1)}) + \frac{B_1 c b}{A_{(2)}^{(1)}} \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{q_2^{(1)} b^2}{A_{(2)}^{(1)} h}, \\ \frac{\partial^2 \nu_2^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{A_{(1)}^{(2)} b^2}{A_{(2)}^{(2)} a^2} \frac{\partial^2 \nu_2^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{A_{(3)}^{(2)} b}{A_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial^2 \nu_1^{(2)}}{\partial x \partial y} - \frac{B_1 b^2}{A_{(2)}^{(2)}} (\nu_2^{(2)} - \nu_2^{(1)}) - \frac{B_1 c b}{A_{(2)}^{(2)}} \frac{\partial w}{\partial y} &= -\frac{q_2^{(2)} b^2}{A_{(2)}^{(2)} h}, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{D_1 b^4}{D_2 a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 D_3 b^2}{D_2 a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\ - \frac{B c}{2 D_2} \left[\frac{b^4}{a} \frac{\partial}{\partial x} (\nu_1^{(2)} - \nu_1^{(1)}) + b^3 \frac{\partial}{\partial y} (\nu_2^{(2)} - \nu_2^{(1)}) + c \left(\frac{b^4}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] &= \frac{q_3 b^4}{2 D_2 h}. \end{aligned} \right. \quad ((1))$$

Здесь

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha h^3}{12(1-\nu^2)}; \quad D_k = \frac{G h^3}{12}; \quad D_3 = 2 D_k + \nu D_1; \quad A_\alpha^{(k)} = \frac{E_\alpha^{(k)} h}{(1-\nu^2)}; \quad A_k^{(k)} = G_{(k)} h_{(k)};$$

$$A_3^{(k)} = A_k^{(k)} + \nu A_1^{(k)}; \quad B = \frac{G(z)}{h}; \quad c = \frac{1}{2} (h_{(k)} - h_{[k]}); \quad (k=1,2, \alpha=1,2),$$

где $w(x, y)$ – нормальное перемещение, $\nu_1^{(k)}(x, y)$ и $\nu_2^{(k)}(x, y)$ ($k=1,2$) – тангенциальные перемещения, h – толщина пластины; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона; $q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_2^{(1)}, q_2^{(2)}, q_3$ – внешние нагрузки.

Уравнение равновесия (1) в векторной – матричной форме запишем в виде

$$SU = Q,$$

где $U(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}, w)$ – перемещения, S – матрица – оператор, которая имеет вид

$$S = S_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + S_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + S_3 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + S_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_5 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + S_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + S_7 \frac{\partial}{\partial x} + S_8 \frac{\partial}{\partial y} + S_9 u.$$

Для решения поставленной задачи изгиба трехслойной пластины со



сложной конфигурацией применяем вариационный метод Бубнова – Галеркина [5-7].

Далее на основе этих значений определяются значения напряжений, моментов и усилий.

На построении последовательности координатных функций, удовлетворяющие граничные условия, используем структурный метод R - функций В.Л.Рвачева.

В общем случае структуру решений, построенную методом R - функций, можно представить в виде [5-7]:

$$\mathcal{G}_1^{(1)} = \mathcal{G}_1^{(1)}(\omega, U_1), \mathcal{G}_1^{(2)} = \mathcal{G}_1^{(2)}(\omega, U_2), \mathcal{G}_2^{(1)} = \mathcal{G}_2^{(1)}(\omega, U_3), \mathcal{G}_2^{(2)} = \mathcal{G}_2^{(2)}(\omega, U_4), \quad w = w(\omega, U_5),$$

где

$$U_1 = \sum_{i=1}^n c_i^{(1)} \varphi_i^{(1)}, \quad U_2 = \sum_{i=1}^n c_i^{(2)} \varphi_i^{(2)}, \quad U_3 = \sum_{i=1}^n c_i^{(3)} \varphi_i^{(3)}, \quad U_4 = \sum_{i=1}^n c_i^{(4)} \varphi_i^{(4)}, \quad U_5 = \sum_{i=1}^n c_i^{(5)} \varphi_i^{(5)},$$

Здесь ω - нормализованное уравнение границы области пластинки;

$\varphi_i^{(k)}$ ($k = \overline{1,5}$) - некоторые полные (базисные) системы функций (степенной, тригонометрические полиномы и т.д.); $c_i^{(k)}$ ($k = \overline{1,5}$) - неопределенные коэффициенты структуры решений, подлежащие определению.

Рассмотрим изгиб жестко-защемленной и шарнирно-опертой трехслойной пластины, изображенной на рис.1.

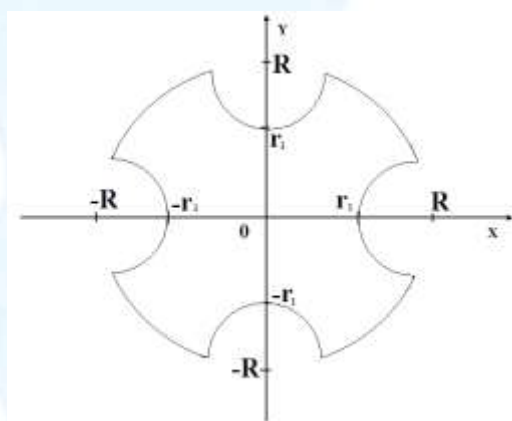


Рис.1. Круг с четырьмя
вырезами

В этом случае

нормализованные уравнения
границы области имеют вид:

$$f1 := \sqrt{R} - \sqrt{x} - \sqrt{y} \geq 0;$$

$$f2 := \sqrt{x - R} + \sqrt{y} -$$

$$\sqrt{r1} \geq 0;$$

$$f3 := \sqrt{x} + \sqrt{y - R} -$$

$$\sqrt{r1} \geq 0;$$

$$f4 := \sqrt{x + R} + \sqrt{y} -$$

$$\sqrt{r1} \geq 0;$$

$$f5 := \sqrt{x} + \sqrt{y + R} - \sqrt{r1} \geq 0;$$



$$\omega := (((f1 \text{ and } f2) \text{ and } f3) \text{ and } f4) \text{ and } f5,$$

где R – радиус большой окружности, $r1$ – радиус высеченной окружности.

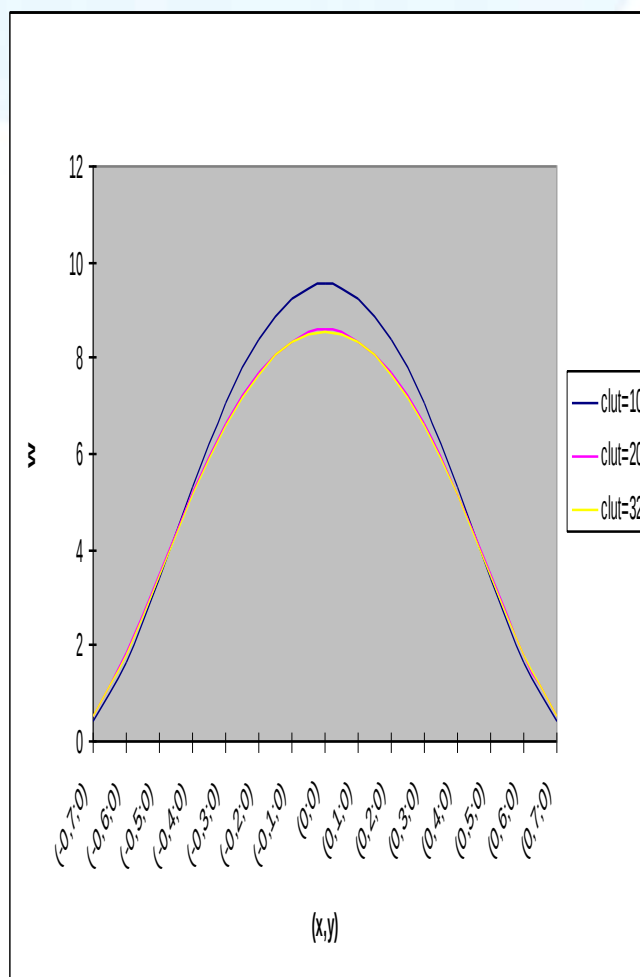
Для проведения вычислительного эксперимента в качестве исходных данных при решении данной задачи имеем:

$R=1\text{ м}$, $r1=0.2\text{ м}$, $h=0.01\text{ м}$ (толщина), $E_1/E_2=25$, $G_1/E_2=0.5$, $G_2/E_2=0.2$, $\nu=0.25$ (коэффициент Пуассона), [8].

Рассматривая значения $\bar{w}$ ($\bar{w}=10^4 w$) по сечению OX ($x, y=0$), проведем численное исследование алгоритма расчета изгиба трехслойной пластины при жестко-защемленном граничном условии и координатах равных 10 (т.е. $N=(nk+1)(nk+2)/2$, где $nk=3$) и постоянных значения узлов Гаусса при вычислении двукратных интегралов (т.е. $slutoch=10, 20 \text{ и } 32$). Результаты расчета приведены в табл.1, график которого дается на рис.2 соответственно.

Табл.1

(x,y)	clut=1 0	clut=2 0	clut=3 2
(-0,7;0)	0,4183	0,5241	0,5114
(-0,6;0)	1,6409	1,8372	1,804
(-0,5;0)	3,3908	3,5081	3,4613
(-0,4;0)	5,2991	5,1833	5,1329
(-0,3;0)	7,045	6,6254	6,5785
(-0,2;0)	8,4063	7,7023	7,6616
(-0,1;0)	9,259	8,3581	8,3227
(0;0)	9,5485	8,5778	8,5443
(0,1;0)	9,2596	8,3592	8,3238
(0,2;0)	8,4052	7,7027	7,662
(0,3;0)	7,0388	6,6225	6,5758
(0,4;0)	5,2869	5,1758	5,1259
(0,5;0)	3,3756	3,4981	3,4522
(0,6;0)	1,6295	1,83	1,7976



(0,7;0)	0,415	0,523	0,5106
---------	-------	-------	--------

Рис.2 Значения $\bar{w}(\bar{w}=10^4 w)$ по сечению ОХ (х, у=0) при $n_k=3$

Анализ численного исследования по полученным результатам показывает, что применение метода R-функций в комбинации с вариационным методом Бубнова – Галеркина при решении поставленной задачи расчета колебания трехслойных пластин со сложной конфигурацией вполне оправдан и дает хорошие результаты.

Литература

- [1]. Назиров Ш.А., Жумаев С.С. Математическая модель колебания многослойных пластин // Вопросы вычисл. и прикл. математики: Сб. науч. труд. – Ташкент, ИМИТ АН РУз, 2010.- вып. 124. – с. 64-79
- [2]. Болотин В.В. Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций.- М. : Машиностроение. 1980. – 375 с.
- [3]. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Мир, 1987.-542с.
- [4]. Образцов И.Ф.Савельев Л.М.Хазанов Х.С. Методы конечных элементов и задач строительной механики летательных аппаратов.- М.: Высшая школа,1985. – 392с.
- [5]. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. – 552с.
- [6]. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970 г. - 512с.
- [7]. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1988. – 552 с.
- [8]. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения задач изгиба и колебаний пологих оболочек.- Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с