ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЁХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Хикматову Гулхаё

Навоийский государственный университет

Аннотация: В этом тезисе рассматриваются вопросы математического моделирования и численного анализа трёхслойных пластин сложной формы. Разработана вычислительная модель, позволяющая проводить оценку напряжённо-деформированного состояния многослойных конструкций с учётом различий в физических и механических свойствах слоёв. В работе использованы методы конечно-элементного анализа и численного интегрирования. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что предложенный подход обеспечивает высокую точность расчётов и устойчивость алгоритма при моделировании сложных геометрических форм. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании композитных материалов, а также в инженерных и строительных конструкциях, где важна надёжность многослойных элементов.

Ключевые слова: трёхслойные пластины, математическое моделирование, численный анализ, конечно-элементный метод, напряжённо-деформированное состояние, вычислительный эксперимент, композитные материалы, сложная конфигурация.

В последние годы вопрос повышения термического сопротивления и упругого поведения стен и других ограждающих конструкций решается переходом к трехслойным конструкциям.

Трёхслойные пластины являются частным случаем многослойных пластин, математические модели которых полученные согласно вариационному принципу Гамильтона – Остроградского приведено в работе:

$$\delta\int_t \left(K - \Pi + \mathrm{A}\right)dt = 0$$

где К – кинетическая энергия системы, П – потенциальная энергия системы, А – потенциал внешних сил, δ – операция варьирования.

Математические модели n слойных анизотропных пластин изучены в работе [1]. При $n = 2$ рассмотрим частный случай, если материалы жестких слоев ортотропные с главными направлениями, совпадающими с направлением осей координат. Получаем уравнения равновесия для трехслойных пластин [2-4]:

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 \upsilon_1^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{A}_{(1)}^{(1)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} a^2} \frac{\partial^2 \upsilon_1^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{A}_{(3)}^{(1)} b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial^2 \upsilon_2^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\mathrm{B}_1 b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)}} \left(\upsilon_1^{(2)} - \upsilon_1^{(1)}\right) + \frac{\mathrm{B}_1 c b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-q_1^{(1)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} h}, \\
\frac{\partial^2 \upsilon_1^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{A}_{(1)}^{(2)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} a^2} \frac{\partial^2 \upsilon_1^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{A}_{(3)}^{(2)} b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial^2 \upsilon_2^{(2)}}{\partial x \partial y} - \frac{\mathrm{B}_1 b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)}} \left(\upsilon_1^{(2)} - \upsilon_1^{(1)}\right) - \frac{\mathrm{B}_1 c b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{-q_1^{(2)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} h}, \\
\frac{\partial^2 \upsilon_2^{(1)}}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{A}_{(1)}^{(1)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} a^2} \frac{\partial^2 \upsilon_2^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{A}_{(3)}^{(1)} b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} a} \frac{\partial^2 \upsilon_1^{(1)}}{\partial x \partial y} + \frac{\mathrm{B}_1 b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)}} \left(\upsilon_2^{(2)} - \upsilon_2^{(1)}\right) + \frac{\mathrm{B}_1 c b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)}} \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{q_2^{(1)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(1)} h}, \\
\frac{\partial^2 \upsilon_2^{(2)}}{\partial y^2} + \frac{\mathrm{A}_{(1)}^{(2)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} a^2} \frac{\partial^2 \upsilon_2^{(2)}}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{A}_{(3)}^{(2)} b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} a} \frac{\partial^2 \upsilon_1^{(2)}}{\partial x \partial y} - \frac{\mathrm{B}_1 h}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)}} \left(\upsilon_2^{(2)} - \upsilon_2^{(1)}\right) - \frac{\mathrm{B}_1 c b}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)}} \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{q_2^{(2)} b^2}{\mathrm{A}_{(2)}^{(2)} h}, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{D_1 b^4}{D_2 a^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2 D_3 b^2}{D_2 a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
-\frac{\mathrm{B} c}{2 D_2} \left[\frac{b^4}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(\upsilon_1^{(2)} - \upsilon_1^{(1)}\right) + b^3 \frac{\partial}{\partial y} \left(\upsilon_2^{(2)} - \upsilon_2^{(1)}\right) + c\left(\frac{b^4}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \right] = \frac{q_3 b^4}{2 D_2 h}.
\end{cases} \qquad ((1)$$

Здесь

$$D_\alpha = \frac{E_\alpha h^3}{12\left(1 - \nu^2\right)}; \quad D_k = \frac{G h^3}{12}; \quad D_3 = 2 D_k + \nu\, D_1; \quad A_\alpha^{(k)} = \frac{E_\alpha^{(k)} h}{\left(1 - \nu^2\right)}; \quad A_k^{(k)} = G_{(k)} h_{(k)};$$

$$A_3^{(k)} = A_k^{(k)} + \nu\, A_1^{(k)}; \; B = \frac{G(z)}{h}; \quad c = \frac{1}{2}\left(h_{(k)} - h_{[k]}\right); \qquad (k = 1,2\,,\; \alpha = 1,2),$$

где $w(x, y)$ - нормальное перемещение, $\upsilon_1^{(k)}(x, y)$ и $\upsilon_2^{(k)}(x, y)\,(k = 1,2)$ - тангенциальные перемещения, h - толщина пластины; E - модуль упругости; ν - коэффициент Пуассона; $q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_2^{(1)}, q_2^{(2)}, q_3$ - внешние нагрузки.

Уравнение равновесия (1) в векторной – матричной форме запишем в виде

$$S\,U = Q\,,$$

где $\mathrm{U}(\vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}, w)$ -перемещения, S - матрица – оператор, которая имеет вид

$$S = S_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + S_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + S_3 \frac{\partial^4}{\partial y^4} + S_4 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + S_5 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + S_6 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + S_7 \frac{\partial}{\partial x} + S_8 \frac{\partial}{\partial y} + S_9 u.$$

Для решения поставленной задачи изгиба трехслойной пластины со

Ilm fan taraqqiyotida raqamli iqtisodiyot va zamonaviy ta'limning o'rni hamda rivojlanish omillari

сложной конфигурацией применяем вариационный метод Бубнова – Галеркина [5-7].

Далее на основе этих значений определяются значения напряжений, моментов и усилий.

На построении последовательности координатных функций, удовлетворяющие граничные условия, используем структурный метод R - функций В.Л.Рвачева.

В общем случае структуру решений, построенную методом R - функций, можно представить в виде [5-7]:

$$\vartheta_1^{(1)} = \vartheta_1^{(1)}(\omega, U_1),\ \vartheta_1^{(2)} = \vartheta_1^{(2)}(\omega, U_2),\ \ \vartheta_2^{(1)} = \vartheta_2^{(1)}(\omega, U_3),\ \ \vartheta_2^{(2)} = \vartheta_2^{(2)}(\omega, U_4),\ \ w = w(\omega, U_5),$$

где

$$U_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(1)}\varphi_i^{(1)},\quad U_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(2)}\varphi_i^{(2)},\quad U_3 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(3)}\varphi_i^{(3)},\quad U_4 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(4)}\varphi_i^{(4)},\quad U_5 = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(5)}\varphi_i^{(5)},$$

Здесь ω - нормализованное уравнение границы области пластинки; $\varphi_i^{(k)}$ $(k = \overline{1,5})$ - некоторые полные (базисные) системы функций (степенной, тригонометрические полиномы и т.д.); $c_i^{(k)}$ $(k = \overline{1,5})$ - неопределенные коэффициенты структуры решений, подлежащие определению.

Рассмотрим изгиб жестко-защемленной и шарнирно-опертой трехслойной пластины, изображенной на рис.1.

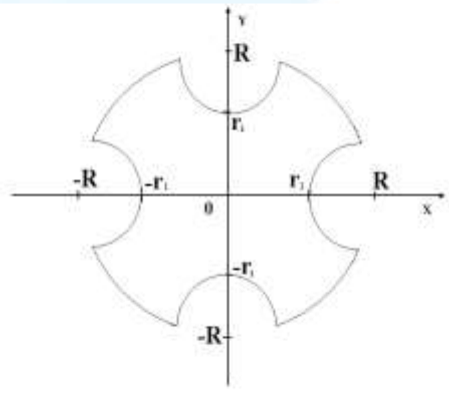


Рис.1. Круг с четырьмя вырезами

В этом случае нормализованные уравнения границы области имеют вид:

f1:=sqr(R)-sqr(x)-sqr(y)>=0;

f2:=sqr(x-R)+sqr(y)-sqr(r1)>=0;

f3:=sqr(x)+sqr(y-R)-sqr(r1)>=0;

f4:=sqr(x+R)+sqr(y)-sqr(r1)>=0;

Ilm fan taraqqiyotida raqamli iqtisodiyot va zamonaviy ta'limning o'rni hamda rivojlanish omillari

f5:=sqr(x)+sqr(y+R)-sqr(r1)>=0;

ω:=(((f1 and f2) and f3) and f4) and f5,

где *R* – радиус большой окружности, *r1* – радиус высеченной окружности.

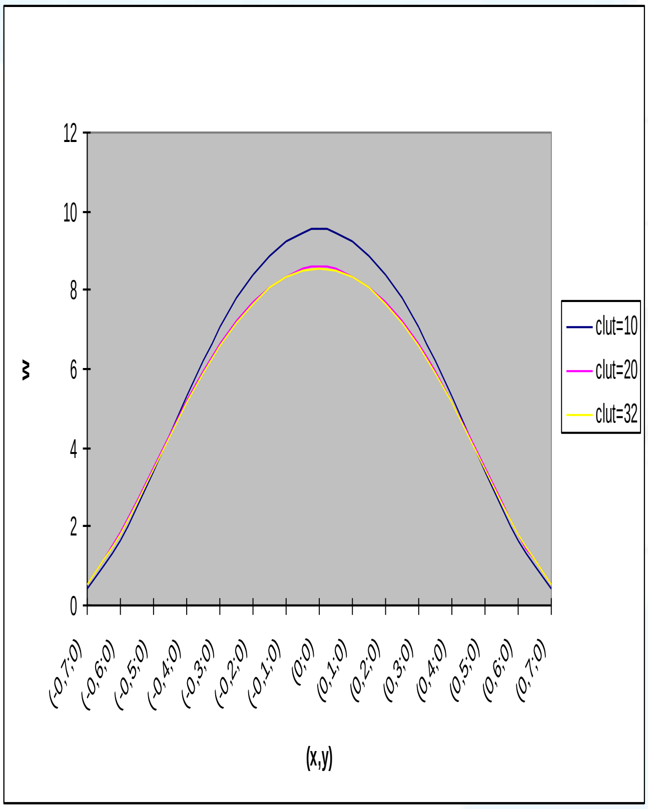
Для проведения вычислительного эксперимента в качестве исходных данных при решении данной задачи имеем:

R=1м, r1=0.2 м, h=0.01 м (толщина), $E_1/E_2=25$, $G_1/E_2=0.5$, $G_2/E_2=0.2$, *ν=0.25* (коэффициент Пуассона),[8].

Рассматривая значения $\overline{w}$ ($\overline{w}=10^4 w$) по сечению OX (x, y=0), проведем численное исследование алгоритма расчета изгиба трехслойной пластины при жестко-защемленном граничном условии и координатах равных 10 (т.е. $N=(nk+1)(nk+2)/2$, где $nk=3$) и постоянных значения узлов Гаусса при вычислении двукратных интегралов (т.е. $slutoch=10,20и32$). Результаты расчета приведены в табл.1, график которого дается на рис.2 соответственно.

Табл.1

(x,y)	**clut=10**	**clut=20**	**clut=32**
(-0,7;0)	0,4183	0,5241	0,5114
(-0,6;0)	1,6409	1,8372	1,804
(-0,5;0)	3,3908	3,5081	3,4613
(-0,4;0)	5,2991	5,1833	5,1329
(-0,3;0)	7,045	6,6254	6,5785



(-0,2;0)	8,4063	7,7023	7,6616
(-0,1;0)	9,259	8,3581	8,3227
(0;0)	9,5485	8,5778	8,5443
(0,1;0)	9,2596	8,3592	8,3238
(0,2;0)	8,4052	7,7027	7,662
(0,3;0)	7,0388	6,6225	6,5758
(0,4;0)	5,2869	5,1758	5,1259
(0,5;0)	3,3756	3,4981	3,4522
(0,6;0)	1,6295	1,83	1,7976
(0,7;0)	0,415	0,523	0,5106

Рис.2 Значения $\overline{w}$ ($\overline{w}=10^4 w$) по сечению OX (x, y=0) при $nk=3$

Анализ численного исследования по полученным результатам показывает, что применение метода R-функций в комбинации с вариационным методом Бубнова – Галеркина при решении поставленной задачи расчета колебания трехслойных пластин со сложной конфигурацией вполне оправдан и дает хорошие результаты.

Литература

[1]. Назиров Ш.А., Жумаев С.С. Математическая модель колебания многослойных пластин // Вопросы вычисл. и прикл. математики: Сб. науч. труд. – Ташкент, ИМИТ АН РУз, 2010.- вып. 124. – с. 64-79

[2]. Болотин В.В. Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций.- М. : Машиностроение. 1980. – 375 с.

[3]. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности.- М.: Мир, 1987.-542с.

[4]. Образцов И.Ф.Савельев Л.М.Хазанов Х.С. Методы конечных элементов и задач строительной механики летательных аппаратов.- М.: Высшая школа,1985. – 392с.

[5]. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. Киев: Наукова думка, 1982. – 552с.

[6]. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970 г. - 512с.

[7]. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1988. – 552 с.

[8]. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения задач изгиба и колебаний пологих оболочек.- Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с