

CHEGARADA QO'ZGALUVCHAN SUPERDIFFUZIYA TENGLAMASI UCHUN QO'YILGAN BOSHLANG'ICH CHEGARAVIY MASALANI YECHISH

Yuldasheva Muborak Adilbekovna

Osiyo Xalqaro Universiteti, Matematika yo'nalishi, 1-kurs magistranti

Annotatsiya: Matematik fizikada diffuziya jarayonlari har doim markaziy ahamiyat kasb etib kelgan va bu sohada klassik usullar bilan birga yangi, zamonaviy usullar joriy qilinib bormoqda. Tadqiqotchilar turli fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarda ustun bo'lgan anomal diffuziyani o'rganishda zamonaviy tenglamalarga, xususan, superdiffuziya tenglamalariga tobora ko'proq murojaat qilmoqdalar. Bu jarayonlarda klassik diffuziya nazariyasi yetarli bo'lmay qolgan joylarda vaqt va fazoviy bo'lakli (fraksion) hosilali tenglamalarning joriy qilinishi yangi natijalarga olib kelmoqda. Qolaversa, amaliy muammolarning ko'plab modellari real muhitdagi cheklangan soha va o'zgaruvchan chegaradagi jarayonlarni qamrab oladi. Xususan, chegarada modda yoki energiya oqimi yoki konsentratsiyasi vaqt va boshqa parametrlarga bog'lanib o'zgarishi mumkin. Shunday sharoitda, chegarada qo'zgaluvchan shartlar ostida superdiffuziya tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalani hal qilish zamonaviy matematik fan oldida turadigan dolzarb muammodir.

Kalit so'zlar: superdiffuziya tenglamasi, bo'lakli hosila, chegaraviy masala, boshlang'ich shartlar, anomal diffuziya, analitik yechim, qo'zgaluvchan chegara, sonli usullar, fizikaviy model, tartibli differensial tenglamalar

Masalaning matematik modeli quyidagicha ifodalanadi: bo'lakli tartibli fazoviy hosilaga ega superdiffuziya tenglamasi ko'rinishi:

$$\partial u / \partial t = D \nabla^{\alpha} u(x, t) + f(x, t),$$

bu yerda $u(x, t)$ fazoda x va vaqtda t nuqtada aniqlangan modda konsentratsiyasi (yoki boshqa fizik kattalik: harorat, energiya zichligi va hokazo); D doimiy diffuziya (yoki superdiffuziya) koeffitsienti; ∇^{α} esa bo'lakli tartibli



fazoviy operator (ko'pincha fractional Laplacian operatori), $1 < \alpha \leq 2$ bo'lishi mumkin; $f(x, t)$ tashqi manba funksiyasi yoki manba-iste'molchi xarakteristikasini beradi.

Masalada, $x \in [0, L]$ sohada va $t \geq 0$ vaqt uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlar quyidagicha beriladi:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$u(0, t) = h_1(t), \quad u(L, t) = h_2(t), \quad t \geq 0.$$

Bunda $\varphi(x)$ - dastlabki shart, chegarada esa vaqtga bog'liq, ya'ni qo'zgaluvchan chegaraviy qiymatlar (harakatlanuvchan chegaralar) berilgan.

Superdiffuziya jarayonlarining klassik diffuziyadan farqi va o'ziga xosligi shunda-ki, bo'lakli hosila yoki fractional operatorlar natijasida zarralar harakati yoki moddaning tarqalish jarayoni klassik diffuziyaga nisbatan ko'proq yoki tezroq dispersiyalanadi. Real muhitda bunday holat, masalan, turli ekologik, geologik, biologik, polimer muhitlar, plazma fizikasi va boshqa sohalarida uchraydi. Aynan chegara sharoitining o'zgaruvchanligi tufayli modda (issiqlik, energiya, va boshqalar) oqimining vaqt bo'yicha dinamikasi va doiraviy muhitdagi taqsimot xususiyatlari yana-da murakkablashadi. Boshlang'ich-chegaraviy masalani yechishda, birinchi navbatda masalaning mazmun-mohiyati va to'g'ri qo'yilganligi tekshiriladi. To'g'ri qo'yilganlik masalaning yechimi mavjudligi, yagonaligi, va boshlang'ich ma'lumotlarga nisbatan barqarorligini bildiradi. Zamonaviy matematik analizda boshlang'ich-chegaraviy muammolarni ifodalash uchun Sobolev fazolari va funktsional analiz usullaridan foydalaniladi [1].

Tenglamani yechishda ko'plab yondashuvlar mavjud, ular orasida analitik o'zgarishlar (Laplace va Fourier o'zgartirishlari), yechimlarning Seriya (superpozitsion) shaklida ifodalanishi yoki sonli usullardan (diskret, spektral, to'rtburchaklar, chebyshev) foydalanish keng tarqalgan. Superdiffuziya uchun Fractional Laplacian operatori ko'plab usullar yordamida aniqlanadi: ularning har biri hisoblash va tahlil jarayonida o'ziga xos afzallik va kamchiliklarga ega. Eng keng tarqalganlaridan biri bu Caputo yoki Riemann-Liouville fractional hosilalari asosida olingan Laplacianlardir. Boshlang'ich shartlar ta'sirida hosil bo'lgan



yechimlar ko'pincha Green funksiyasi yordamida ifodalanadi. Green funksiyasi bu shunday komponentki, modda yoki impulsning boshlang'ich va tashqi manbalardan qanday tarqalishini tasvirlaydi. Chegarada qo'zgaluvchan shartlar bo'lsa, Green funksiyasining o'ziga xos kombinatsiyalardan tashkil topgan shakli olinadi va boshlang'ich-chegaraviy masalani to'liq qanoatlantiruvchi umumiy yechim hosil qilinadi. Laplace o'zgartirishidan foydalanilganda, vaqt bo'yicha differensial tenglama Laplace sohasiga o'tadi va boshlang'ich qiymatlar parametrli ko'rinishda kiritiladi. Fazoviy koordinata bo'yicha esa, Green funksiyasi yoki Fourier o'zgartirishlari yordamida masala chiziqlilashtiriladi. So'ng, chegaraviy shartlarga moslashtirilgan umumiy yechim (ayniqsa, zanjirli integral shaklda) olinadi. Bu yechimni asl o'lchov sohasiga qaytarish uchun Laplace va Fourier o'zgartirishlarini teskari qaytarish va ulardan ko'rsatilgan chegaraviy shartlarni to'g'ri bajaradigan koeffitsientlar bilan to'ldirish zarur bo'ladi [2].

Aksari hollarda, analitik natijalar bo'lakli hosilalar ishtirokida yuqori darajada murakkab bo'lishi mumkin. Masalan, Mittag-Leffler funktsiyalari, Fox-H funktsiyalari, yoki boshqa maxsus funktsiyalar hosil bo'ladi. Bunday hollarda, boshlang'ich-chegaraviy masalani zamonaviy kompyuter texnologiyalari yordamida sonli usulda yechishga to'g'ri keladi. Sonli yondashuvlarda, masala bo'lakli differensial diskret formulalar yordamida aniqlanadi. Bo'lakli hosilalar uchun yuqori aniqlikdagi Grunwald-Letnikov formulalari yoki Caputo bo'lakli hosilasi uchun modifikatsiyalangan finite difference (to'rtburchaklar) metodlari joriy etiladi. Fazoviy bo'lakli operatorlar uchun esa, mos keladigan diskret operatorlar, spektral metodlar, splayn interpolatsiyasi kabi texnikalar har bir muammo uchun alohida moslashtiriladi [3].

Masalaning yechimini topishda asosiy bosqichlar quyidagilardan iborat:

1. Boshlang'ich va chegara shartlarini to'liq aniqlashtirish va fizik xossalarni to'g'ri aks ettirish.
2. Fractional operatorlarni aniqlash va ular uchun zarur formulalarni tanlash.
3. Laplace yoki Fourier o'zgartirishlari yordamida masalani integral fazoda chiziqlilash.



4. Yechimni umumiy (integral, seriya, Green funksiyali) ko'rinishda olish.
5. Asl o'lchovlar sohasiga teskari o'zgartirishlar orqali yechimni topish.
6. Agar analitik natija mushkul bo'lsa, kompyuter yordamida yuqori aniqlikda sonli hisoblashlarni tashkil etish va natijalarni tahlil qilish.

Superdiffuziya tenglamasi ostidagi chegarada qo'zgaluvchan shartlar bilan boshlang'ich-chegaraviy masalalarni tadqiq qilishda olingan yechimlar zamonaviy ilmiy va texnik jarayonlarda juda ko'plab qo'llanilmoqda. Ularning fizika, kimyo, texnika, biologiya va geologiya sohalarida, xususan, qatlamlarda modda, issiqlik va energiya tarqalishi, siltalanuvchan muhita qayta taqsimlanishi, immun tizimi va boshqa hayotiy jarayonlarning matematik modellari kabi yo'nalishlarda beqiyos ahamiyati bor. Ilgarigi klassik yondashuvlar bu borada to'liq javob bera olmagan paytda aynan yangi superdiffuziya va bo'lakli hosilali tenglamalar real ko'rinishni to'liq aks ettira oladi. Bunday yechimlarni matematik jihatdan chuqur tahlil qilish uchun funktsional analiz, variatsion prinsiplar, ekologik modellash, fundamental fizik qonuniyatlar, statistik nuqtai nazarlar bir-birini to'ldirib boradi. Aynan shu integratsiyalashgan ilmiy yondashuv superdiffuziya jarayonlarining haqiqiy tabiatini ochib berishga xizmat qilmoqda [4].

Tahlil natijalari shuni ko'rsatadiki, bo'lakli hosilali tenglama va o'zgaruvchan chegara sharti ishtirokida har bir nuqtada va har bir vaqt momentida zarralar yoki issiqlik oqimining kutilganidan ko'proq yoki sustroq tarqalishi mumkin. Bu jarayonlarda g'ayrioddiy taqsimot, fazoviy va vaqt bo'yicha uzoq masofali, uzoq muddatli "xotira" effektlari, konsentratsiya oldindan aytib bo'lmaydigan yuqori gradientli joylarda to'planishi yoki sezilarli tarqalish frontlarining yuzaga kelishi kuzatiladi. Amaliy imkoniyatlar kengayib borishi bilan birga, superdiffuziya tenglamasi va bo'lakli differensial yondashuvlar bilan ish olib borishda ishlatiladigan sonli usullarning aniqligi, hisoblash barqarorligi va algoritmik samaradorligi ustida ham doimiy izlanishlar olib borilib, optimal yondashuv va zamonaviy dasturiy vositalar ishlab chiqilmoqda. Yangi algoritmlar va kompyuter grafikasi texnologiyalari yordamida bu muammolarning natijalari real holatlarda vizual ko'rikdan o'tkaziladi, olingan modellar asosida optimal texnologik

jarayonlar ishlab chiqiladi. Yechilgan boshlang'ich-chegaraviy masalalar natijasida olinadigan yechimlarning xatti-harakati va xususiyatlari fizik jarayonlarning aniq namoyonini beradi. Xususan, chegarada qo'zgaluvchan shart natijasida fazoning ma'lum nuqtalarida modda yoki energiya to'planishi, ko'p vaqt o'tishi bilan mazkur taqsimotning o'zgarishi va butun sistemaning ustuvor natijasiga ta'siri tahlil qilinadi. Bundan tashqari, bunday natijalar tizimlarni boshqarish, optimal joriy etish va xavfsizligini ta'minlashga xizmat qiladigan boshqaruv stsenariylarini ishlab chiqishda ham katta yordam beradi [5].

Xulosa:

Xulosa qilib aytganda, chegarada qo'zgaluvchan superdiffuziya tenglamasi uchun qo'yilgan boshlang'ich-chegaraviy masalani hal qilish zamonaviy matematik analiz, informatika hamda texnika va tabiiy fanlarining dolzarb yo'nalishlaridan biridir. Ushbu masala doirasida olingan nazariy va amaliy natijalar bilan turli sohalaridagi muammolarni chuqur tahlil qilish va sifatli echimlar ishlab chiqish imkoniyati tug'iladi. Natijalarning yuqori aniqlik, barqarorlik va fizikaviy moslikka ega bo'lishi soha mutaxassislarining oldiga qo'yilgan uch asosiy talabdir. Davomli ilmiy izlanishlar orqali kutilyotgan eng muhim natijalardan biri sifatida murakkab tizimlarning boshqariluvchi taqsimot jarayonlarini to'liq nazorat qilish imkoniyati, shu vosita orqali insoniyat manfaati uchun yangi texnologiyalar va samarador tizimlar yaratish yo'li ochiladi. Mazkur mavzu ustida olib borilayotgan ilmiy-tadqiqot ishlari zamonaviy matematik fizika va fan-texnika taraqqiyotining navbatdagi eng dolzarb va istiqbolli yo'nalishlaridan biri bo'lib qoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Abdullaev, N. (2017). "Chegaraviy masalalarning analitik yechimlari zamonaviy usullarda". Fanda Yangi Yo'nalishlar, 3(2), 27-35.
2. Akramova, M. (2019). "Superdiffuziya tenglamalari va amaliy ilovalar". O'zbekiston Matematika Jurnal, 21(4), 115-123.
3. Alimov, B. (2018). "Bo'lakli hosilali tenglamalar va ularning yechimlari". Teoriyaviy va Amaliy Analiz, 12(1), 12-21.



4. Boboev, R. (2020). "Funksional analiz va superdiffuziya masalalarida chegaraviy shartlar". O'zbekiston Fanlari Akademiyasi Xabarlari, 45(2), 63-70.
5. Islomov, H. (2022). "Superdiffuziya jarayonlarida bosqichli tahlil usullari". Ilm va Innovatsiya, 9(3), 92-100.
6. Karimov, A. (2019). "Bo'lakli differensial tenglamalarning kompyuterda sonli yechimlari". Zamonaviy Texnologiyalar, 5(2), 50-57.
7. Khudoyberdiyeva, S. (2021). "Anomal tarqalish va chegarada o'zgaruvchan shartlar". Fizika-Nazariy Tadqiqotlar, 33(1), 80-88.