МЕТОДИКА КОЛЕБАНИЯ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРИВОЛИНЕЙНОГО УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА

НАБИЕВ АБДУЛЛО АБДУВАХИДОВИЧ

Ассистент кафедры «Физика, биофизика и медицинская физика»

Самаркандского государственного медицинского университета

Аннотация: *Задача собственных колебаний упругих линейных деформируемых тел к решению системы однородных линейных алгебраических уравнений, которые представим в матричной форме. Поскольку решение этой однородной системы линейных алгебраических уравнений отличны о т нуля, для её решения определитель системы приводиться к виду характеристического уравнения* n*-ой степени для квадратной матрицы.*

Ключевые слова*: собственные колебания, деформация тел, определители, матрица, круговые частоты, кубические уравнения, миноры, модуль упругости.*

Задача собственных колебаний упругих линейных деформируемых тел к решению системы однородных линейных алгебраических уравнений, которые представим в матричной форме

$$\begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & C_{3,4} & C_{3,5} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,5} & C_{4,6} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} & C_{5,6} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & C_{6,4} & C_{6,5} & C_{6,6} & C_{6,7} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{7,5} & C_{7,6} & C_{7,7} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Поскольку решение этой однородной системы линейных алгебраических уравнений отличны о т нуля, для её решения определитель системы (1) приводиться к виду характеристического уравнения n-ой степени для квадратной матрицы-An-порядка

$$\det(A-\lambda E)=0 \qquad (2)$$

где E-единичная матрица, соответствующая заданной матрице. Корнями уравнения (2) являются собственные значения λ_i, роль которых в данной задаче выполняют квадраты круговых частот собственных колебаний $\acute{\omega}_i^2$. Рассмотрим усеченную систему однородных линейных алгебраических уравнений, полученную из (1) при m=1,2,3. В матричной форме эта система имеет вид:

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Усечение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1) не отразиться существенно на точности решения задачи, так как это система является регулярной [1]. Исследование, проведенное в соответствии с методикой [2], показало, что сумма модулей коэффициентов второстепенных членов каждой строки матрицы A, деленная на модуль коэффициента при главном диагональном члене, оказывается меньше единицы при любом параметре μ. Все элементы матрицы B отличны от нуля ($b_m \neq 0$), следовательно определитель матрицы коэффициентов A должен равняться нулю.

Ilm fan taraqqiyotida raqamli iqtisodiyot va zamonaviy ta'limning o'rni hamda rivojlanish omillari

Поставленная задача определения частот собственных колебаний заданного участка трубопровода сводится к задаче о собственных значениях матрицы A. Приведем определитель (3) к виду характеристического уравнения матрицы A. С этой целью запишем этот определитель, подставив в него значения диагональных элементов $c_{m,m}$по формулам:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{1n} - B_{1n} - C_{1n}\omega^2 & c_{1.2} & c_{1.3} \\ c_{2.1} & A_{2n} - B_{2n} - C_{2n}\omega^2 & c_{2.3} \\ c_{3.1} & c_{3.2} & A_{3n} - B_{3n} - C_{3n}\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Умножим каждую строку данного определителя на 1/ C_{mn}. В результате по свойству определителей получим:

$$\frac{1}{C_{1n}C_{2n}C_{3n}} \times \begin{vmatrix} \frac{A_{1n} - B_{1n}}{C_{1n}} - \omega^2 & \frac{c_{1.2}}{C_{1n}} & \frac{c_{1.3}}{C_{1n}} \\ \frac{c_{2.1}}{C_{2n}} & \frac{A_{2n} - B_{2n}}{C_{2n}} - \omega^2 & \frac{c_{2.3}}{C_{2n}} \\ \frac{c_{3.1}}{C_{3n}} & \frac{c_{3.3}}{C_{3n}} & \frac{A_{3n} - B_{3n}}{C_{3n}} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку множитель $1/C_{1n}C_{2n}C_{3n}$, появившейся у определителя в результате проделанной операции, отличен от нуля, следовательно, нулю равен определитель, который является характеристическим уравнением матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{1.2} & d_{1.3} \\ d_{2.1} & d_{2.2} - \lambda & d_{2.3} \\ d_{3.1} & c_{3.2} & d_{3.3} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

$\lambda = \omega^2,$ $\qquad d_{m,m} = \frac{A_{mm} - B_{mm}}{C_{mm}}$

$d_{m,m\pm1} = \frac{C_{mm\pm1}}{C_{mm}}$ $\qquad d_{m,m\pm2} = \frac{C_{mm\pm2}}{C_{mm}}$

(5)

Раскрывая определитель вида (4), получаем характеристические уравнения степени, равной порядку матрицы *A*, корни которого λ_i, называемые собственными значениями, определяют квадраты частот собственных колебаний рассматриваемого тела. Характеристическое уравнение матрицы *A* порядка *к* содержит в левой части многочлен *к*-ой степени от λ со старшим коэффициентом, равным единице, т.е. степень степень характеристического уравнения определяется порядком матрицы *A*.

Если взять матрицу 1-го порядка при волновом числе m=1, то из (4) получим линейное характеристическое уравнение относительно λ :

$$d_{1,1} - \lambda = 0$$

Подставив сюда соответствующие значения по (5), получим равенство:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{A_{1n} - B_{1n}}{C_{1n}}$$

Рассматривая матрицу 2-го порядка при волновых числах m=1 и 2, имеем из (4)

$$\begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{1.2} \\ d_{2.1} & d_{2.2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ilm fan taraqqiyotida raqamli iqtisodiyot va
zamonaviy ta'limning o'rni hamda rivojlanish omillari

Откуда получим квадратное характеристическое уравнение:

$$\lambda^2\text{-}(d1,1+d2,2)\lambda+(d_{1,1}d_{2,1}-d_{1,2}d_{2,1})=0 \qquad (6)$$

решение которого дает два корня λ_1 и λ_2, определяется квадрата круговых частот собственных изгибных колебаний участка трубопровода $\acute{\omega}^2{}_{1n}$и $\acute{\omega}_{2n}$по соответствующим формам колебаний при m=1 и 2.

Для матрицы3-го порядка, полученный при волновых числах m=1,2,3, приходим к определителю (4), раскрыв которой получаем кубическое характеристическое уравнение матрицы A:

$$\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda-I_3=0 \qquad (7)$$

Постоянные коэффициенты которого имеют вид:

$$I_1=d_{1.1}+d_{2.2}+d_{3.3}.$$

$$I_2=d_{1.1}d_{2.2}+d_{2.2}d_{3.3}+d_{3.3}d_{1.1}-d_{1.2}d_{2.1}-d_{2.3}d_{3.2}-d_{3.1}d_{1.3},$$

$$I_3=d_{1.1}d_{2.2}d_{3.3}+d_{1.2}d_{2.3}d_{3.1}+d_{2.1}d_{3.2}d_{1.3}-d_{1.1}d_{2.3}d_{3.2}-d_{2.2}d_{3.1}d_{1.3}-d_{3.3}d_{2.1}d_{1.2}$$

Решение кубического уравнения (7) дает три действительных корня, т.е. собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ матрицы A, которые представляют собой квадраты круговых частот изгибных колебаний $\acute{\omega}^2{}_{mn}$заданного криволинейного участка трубопровода протекающей жидкостью по формам колебаний при m=1,2,3.

В общем случае для квадратной матрицы вида (2) порядка kв соответствии с характеристическим уравнением κ-ой степени со старшим коэффициентом, равной единице:

$$|A-\lambda E|=(-1)^{\kappa}\lambda^{\kappa}+I_1\lambda^{k-1}+\ldots+I_1\lambda^{k-1}+..+I_k=0$$

Коэффициенты которого выражается через элементы матрицы

$$I_1=(-1)^{k-1}(c_{1.1}+c_{2.2}+\ldots+c_{k.k}),\ I_1=(-1)^{k-1}S_1,\quad I_k=|A|,$$

гдеS_1-сумма всех главных миноров (т.е. миноров, симметрично расположенных относительно главной диагонали) порядка lматрицы A.

Кроме того, имеют следующие свойства корней характеристического уравнения (собственных чисел) матрицы A:

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_к=c_{1.1}+c_{2.2}++\ldots+c_{к.к},$$

$$\lambda_1 \text{ x } \lambda_2\text{x}\ldots\text{x } \lambda к=|A|,$$

т.е. сумма собственных значений матрицы A равна ее следу (сумме элементов главной диагонали), а произведение –определителю $|A|$.

Рассмотрим собственные колебания криволинейных участков стального трубопровода. Определение частот собственных колебаний проводиться по выше изложенной методике сводиться к отысканию корней характеристических уравнений. Вычисление коэффициента решения кубических уравнений (7) приводилось по схеме Горнера на ПЭВМ. Исследование частот собственных изгибных колебаний криволинейных участков стальных трубопроводов продольной осью в виде половины окружности ($\pi\geq\beta\geq0$) со стационарным потоком жидкости (вода) при значениях ее скорости Uот 50м/с позволило оценить влияние скорости потока на частоты первых двух форм колебаний (m=1,2,3 при n=1,2,3).

Таблица 1. Собственные частоты в зависимости от скорости протекающей жидкости

r/R=1/20, h/r=1/70 μ=23		**$\acute{\omega}_{mn}$(Гц) при скорости протекающей жидкости в м/с**		
Форма колебаний	**Частота**	**U=0**	**U=20**	**U=50**
m=1	$\acute{\omega}_{1.1}$	19,5	19,0	18,2
	$\acute{\omega}_{1.2}$	20,0	19,5	18,7

	$\acute{\omega}_{1.3}$	21,9	21,7	21,5
m=2	$\acute{\omega}_{2.1}$	12,3	11,8	11,4
	$\acute{\omega}_{2.2}$	15,6	14,8	13,5
	$\acute{\omega}_{2.3}$	17,6	17,4	17,2
m=3	$\acute{\omega}_{3.1}$	12,0	11,2	10,2
	$\acute{\omega}_{3.2}$	15,4	14,6	13,3
	$\acute{\omega}_{3.3}$	17,3	17,1	16,8

Эти параметры в свою очередь соответствовали следующим значениям коэффициентов кривизны отводов и изгибов трубопроводов по СНиП: λ=0,57; 0,28 и 0,14. Модуль упругости стали, из которой изготовлены трубы, принять равным $E=2{,}10^5$Мпа, коэффициент Пуассона ν=0,3.

Литература

1. Бозоров М.Б., Сафаров И.И, Шокин Ю.И. «Численное моделирование колебаний диссипативно однородных и не однородных механических систем» СО РАН, Новосибирск, 1966, 188с.
2. Шкалова А.А. «Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений параметром в граничных условиях» Труды семинара имени Петровского,1983, вып. 9, с 190-229