



ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ DEFINITE INTEGRAL IN ECONOMIC PROBLEMS

Туйчиева Сайёра Тахировна

д.ф.ф.-м.н., доцент кафедры «Высшая математика»

Ташкентского государственного транспортного университета,

sayyora-tohirzoda@mail.ru

Уразова Маржона Валибой кизи

студентка 1 курса экономического факультета

Ташкентского государственного транспортного университета

marjonaorazova67@gmail.com

Аннотация: Статья посвящена рассмотрению определенных интегралов. Решению экономических задач с помощью определенных интегралов. В статье рассматриваются примеры использования математических методов в решении поставленных экономических задач.

Abstract: The article is devoted to the consideration of definite integrals. The solution of economic problems using definite integrals. The article examines examples of the use of mathematical methods in solving economic problems.

Ключевые слова: функция, определенный интеграл, предел, затрат времени, объем продукции, производительность труда, функция издержек.

Keywords: function, definite integral, limit, time expenditure, volume of production, labor productivity, cost function.

Математический анализ является неотъемлемым инструментом не только множества технических наук, но и экономики, который необходим для решения тех или иных экономических задач. Рассмотрим, экономический



смысл интеграла, после чего перейдем к интегральному исчислению, а конкретно, к использованию определенных интегралов для решения экономических задач [1-4].

Экономический смысл интеграла

Пусть функция $Z = f(x)$ описывает изменения производительности некоторого производства с течением времени. Найдем объём продукции Q , произведенный за промежуток времени $[0, T]$.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$. Для величины объём продукции ΔQ , произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, имеем

$$\Delta Q = f(\xi_i) \Delta t_i,$$

где

$$\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\text{Тогда } Q = \sum_{i=1}^n Q_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i$$

При стремлении $\max \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$Q = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i.$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$Q = \int_0^T f(t) dt, \quad (1)$$

т.е. если $f(t)$ - производительность труда в момент времени t , то $\int_0^T f(t) dt$ есть объём выпускаемой продукции за промежуток $[0, T]$ [2-3].

Некоторые экономические приложения определенного интеграла



1. Нахождение экономических функций по известным предельным величинам.

В курсе микроэкономики рассматриваются так называемые предельные величины, т.е. для данной величины представляемой некоторой функцией $f(x)$, рассматривают ее производную $f'(x)$. Поэтому часто приходится находить экономическую функцию (первообразную) по данной функции предельных величин (производной).

Пример 1. Задана функция предельных издержек (издержки на производство дополнительной выпускаемой единицы продукции товара) $C = 4q^2 - 10q + 200$. Найти функцию издержек $C = C(q)$ и вычислить издержки в случае производства 10 единиц товара.

Решение. Находим интегрированием издержек на изготовление 18 ед. товара

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{18} (4q^2 - 10q + 200) dq = \left(\frac{4}{3} q^3 - \frac{10}{2} q^2 + 200q \right) \Big|_0^{18} = \\ &= \left(\frac{4}{3} \cdot 18^3 - \frac{10}{2} \cdot 18^2 + 200 \cdot 18 \right) - \left(\frac{4}{3} \cdot 0^3 - \frac{10}{2} \cdot 0^2 + 200 \cdot 0 \right) = 9756 \text{ (у.е.)}. \end{aligned}$$

2. Нахождение объема продукции по известной функции производительности труда.

Экономический смысл определенного интеграла, выражающий объем произведенной продукции по известной функции производительности труда был рассмотрен выше (см. формулу (1)).

Пример 2. Найти объем произведенной продукции за время $t = 9$, если производительность труда задана функцией

$$f(t) = -t^2 + 16t \text{ (ед/час)}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (1)

$$Q = \int_0^T f(t) dt = \int_0^9 (-t^2 + 16t) dt = \left(-\frac{t^3}{3} + \frac{16t^2}{2} \right) \Big|_0^9 = \left(-\frac{9^3}{3} + \frac{16 \cdot 9^2}{2} \right) - \left(-\frac{0^3}{3} + \frac{16 \cdot 0^2}{2} \right) = 405 \text{ (у.е.)}.$$



3. Нахождение среднего времени, необходимого для изготовления изделия.

Пусть известна функция $t=t(x)$, описывающая изменение затрат времени t на изготовление изделия, в зависимости от степени освоения производства, где x - порядковый номер изделия в партии.

Тогда среднее время t_{cp} , затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx. \quad (2)$$

Функция изменения затрат времени на изготовление изделий $t=t(x)$ часто имеет вид

$$t = a \cdot x^{-b},$$

где a - затраты времени на первое изделия, b - показатель производственного процесса [4].

Пример 3. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1=64$ до $x_2=100$ изделий, если функция изменения затрат времени $t=144 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ ч.

Решение. Используя формулу (2), получаем:

$$t_{cp} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx = \frac{1}{100 - 64} \int_{64}^{100} \frac{144}{\sqrt{x}} dx = \frac{144}{36} \cdot 2 \sqrt{x} \Big|_{64}^{100} = 8 \cdot (\sqrt{100} - \sqrt{64}) = 8 \cdot 2 = 16 \quad (ч).$$

В итоге мы рассмотрели задачи, в решении которых были использованы интегрирование и определенные интегралы, в частности. Можно наблюдать, что интегральное исчисление абсолютно точно является неотъемлемым инструментом экономиста, при решения различных экономических профессиональных задач и моделировании различных экономических процессов и явлений.



СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобкова Н. И., Максимов Ю. Д., Хватов FO. А. Высшая математика для экономистов и менеджеров: Учебное пособие / Под ред. Ю. А. Хватова. — СПб.: Издательство «Лань», 2018. — 520 с.
2. Ключин В.Л. Высшая математика для экономистов: Учеб. по собие. — М.: ИНФРА-М, 2009. – 448 с.
3. Ситун А.Е. Определенный интеграл в экономических задачах. Учебное пособие для студентов экономических специальностей. Благовещенск: Амурский гос. ун-т, 2005. – 66 с.
4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник. - 6-е изд., испр. - М.: Издательство «Дело» АНХ, 2008. - 720 с.