J-QO‘SHMA UMUMLASHGAN FRIDIRIXS MODELINING MUHIM SPEKTRI

Tosheva Nargiza Ahmedovna,
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston
n.a.tosheva@buxdu.uz
Qodirov Suhayl Orifjonovich,
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O‘zbekiston
s.o.qodirov@buxdu.uz

Annotatsiya. *Ushbu maqolada J-qo‘shma umumlashgan Fridirixs modeli operatorining spektral xossalari o‘rganilgan. Gilbert fazosida 2×2 blok matritsali operator qaraladi. Operatorning J-o‘z-o‘ziga qo‘shmalik shartlari aniqlangan. Veyl teoremasi yordamida operatorning muhim spektri topilgan. Shuningdek, operatorning xos qiymatlari Fredgolm determinanti nollari bilan bog‘liqligi ko‘rsatilgan.*

Kalit so‘zlar. *Fridirixs modeli, J-qo‘shma operator, spektr, muhim spektr, xos qiymat, Fredgolm determinant.*

Abstract. *This paper investigates the spectral properties of a J-self-adjoint generalized Friedrichs model operator. A 2×2 block matrix operator is considered in a Hilbert space. The conditions for the J-self-adjointness of the operator are determined. The essential spectrum of the operator is found using Weyl's theorem. Furthermore, the relationship between the eigenvalues of the operator and the zeros of the Fredholm determinant is shown.*

Key words. *Friedrichs model, J-self-adjoint operator, spectrum, essential spectrum, eigenvalue, Fredholm determinant.*

Аннотация. *В статье исследуются спектральные свойства оператора обобщенной модели Фридрихса, являющегося J-*

самосопряженным. В гильбертовом пространстве рассматривается блочный оператор 2×2. Определены условия J-самосопряженности оператора. Существенный спектр оператора найден с помощью теоремы Вейля. Также показана связь собственных значений оператора с нулями определителя Фредгольма.

Ключевые слова. *Модель Фридрихса, J-самосопряженный оператор, спектр, существенный спектр, собственное значение, определитель Фредгольма.*

Kirish. Fridirixs modeli kvant mexanikasi, tarqalish nazariyasi va boshqa sohalarda keng qo‘llaniladigan muhim matematik obyektlardan biridir. Ushbu model oddiy tuzilishga ega bo‘lishiga qaramay, ko‘plab murakkab fizik hodisalarni tavsiflash imkonini beradi. Keyingi yillarda Fridirixs modelining turli umumlashmalari, jumladan, J-qo‘shma operatorlar bilan bog‘liq bo‘lgan hollari faol o‘rganilmoqda. Bunday operatorlar ishorasi aniqlanmagan metrikali fazolarda fizik sistemalarni tavsiflashda paydo bo‘ladi. Quyida J-qo‘shma umumlashgan Fridirixs modelining spektral xususiyatlari tahlil qilishga harakat qilamiz.

Bevosita asosiy qismga o’tish oldidan J-o‘z-o‘ziga qo‘shma operator tushunchasini eslatib o’tishni joiz topdik.

Ta’rif. Faraz qilaylik, $H = H_1 \oplus H_2$ Gilbert fazo va

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{1}$$

operator berilgan bo’lgan. Agar H gilbert fazosida zich bo’lgan A chiziqli operator uchun JA operator H da o‘z-o‘ziga qo‘shma bo’lsa, u holda A operatorga J-o‘z-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi.

Faraz qilaylik, $T^d = [-\pi;\pi]^d - d$ o‘lchamli kub, $L_2(T^d) - T^d$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Gilbert fazosi, C esa bir o‘lchamli kompleks fazo bo‘lsin.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$H_0 = C\ ;$$

$$H_1 = L_2(T^d);$$

$$H = H_0 \oplus H_1\ .$$

H Gilbert fazoda Fok fazosining qirqilgan ikki zarrachali qism fazosi deyiladi.

H Gilbert fazisida quyidagi

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

2×2 blok matritsali operatorni qaraymiz. Ushbu operator umumlashgan Fridirixs modeli deyiladi.

Bu yerda:

$$h_{ij}: H_j \to H_i\ , \qquad i,j = 0{,}1.$$

operatorlar ushbu tengliklar orqali ta'sir qiladi :

$$(h_{00}f_0)_0 = af_0\ ;$$

$$(h_{01}f_1)_0 = \int_{T^d} v(t) f_1\,(t)dt\ ;$$

$$(h_{10}f_0)_1(x) = v(x)f_0(x)$$

$$(h_{11}f_1)_1(x) = u(x)f_1(x)\ ;$$

Bunda $f_i \in\ H_i$, $i = 0{,}1$, $a -$ fiksirlangan haqiqiy son $(a \in R)$, $u(x)$ esa T^d da aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyadir.

Endi h operatorning J-o‘z-o‘ziga qo‘shma ekanligini ham tekshiramiz.

Quyidagi ko‘rinishda berilgan J operatorni olaylik:

$$J = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}$$

Bu yerda I_0 H_0 dagi birlik operator, I_1 esa H_1 dagi birlik operator.

Biz $(Jh)^* = Jh$ ekanligini tekshirishimiz kerak.

Jh operatorini hisoblaymiz:

$$Jh = \begin{pmatrix} I_0 & 0 \\ 0 & -I_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ -h_{10} & -h_{11} \end{pmatrix}$$

$$(Jh)^* = \begin{pmatrix} h_{00}^* & -(h_{10})^* \\ h_{01}^* & -h_{11}^* \end{pmatrix}$$

Endi ushbu

$$\begin{pmatrix} h_{00}^* & -(h_{10})^* \\ h_{01}^* & -h_{11}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ -h_{10} & -h_{11} \end{pmatrix}$$

tenglikning bajarilishini tekshiramiz.

1. $h_{00}^* = h_{00}$ ning o‘rinli ekanligi $a \in R$ ekanligidan o‘z-o‘zidan kelib chiqadi.

2. $h_{11}^* = h_{11}$ shartni H_1 fazodan ixtiyoriy f_1 element olib tekshiramiz:

Ushbu

$$(h_{11}^* f_1)_1(x) = (h_{11} f_1)_1(x) \Longrightarrow \overline{u(x)} f_1(x) = u(x) f_1(x)$$

tenglik $u(x)$ ning haqiqiy qiymatli funksiya ekanligidan, barcha $f_1 \in L_2(T^d)$ uchun bajariladi.

3. $h_{01}^* = -h_{10}$ shartni H_0 fazodan ixtiyoriy f_0 element olib tekshiramiz:

$$(h_{01}{}^* f_0)_1(x) = (-h_{10} f_0)_1(x)$$

$$\overline{v(x)}f_0(x) = -v(x)f_0(x)$$

Bu tenglik barcha $f_0 \in C$ larda bajarilishi uchun $\overline{v(x)} = -v(x)$, ya'ni $v(x)$ funksiya sof mavhum qiymatli funksiya bo'lishi kerak.

4. $v(x)$ funksiya sof mavhum qiymatli funksiya bo'lganida $-(h_{10})^* = h_{01}$ shartning ham bajarilishini ko'rsatish qiyin emas.

Demak, $v(x)$ funksiya sof mavhum qiymatli funksiya bo'lganda umumlashgan Fridirixs modeli operatori h J-o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

Ushbu

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix}$$

operatorli matritsaning muhim spektrini aniqlash maqsadida $H = H_0 \oplus H_1$
Gilbert fazosida

$$h_0 : H \to H$$

$$h_0 \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11} \end{pmatrix}$$

qo'zg'almas operator

$$\omega \coloneqq h - h_0 = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & 0 \end{pmatrix}$$

qo'zg'alish operatori $A, B : H \to H$, $A = A^*, B = B^*$ Agar A va B − kompakt operatorlar bo'lsa,

$$\sigma_{ess}(A + B) = \sigma_{ess}(A)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Kompakt operatorning xossasiga ko‘ra, agar kompakt operator chiziqli chegaralangan bo‘lsa u chekli o‘lchamli bo‘ladi.

Endi ω uchun $dim\, Im\omega = 2$ bo‘lishini ko‘rsatamiz.

$$\omega f = \begin{pmatrix} h_{00}f_0 + h_{01}f_1 \\ h_{01}^* f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} af_0 + \int\limits_{T^d} v(t)f_1(t)dt \\ v(x)f_0 \end{pmatrix}$$

$Im\omega = \{(a, v(x)b) : a, b \in C\}$

$f^{(1)} = (1,0)$, $f^{(2)} = (1, v(x))$

$\alpha f^{(1)} + \beta f^{(2)} = \big(\alpha, \beta v(x)\big) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0 \Rightarrow f^{(1)}, f^{(2)}$ −chiziqli bog‘langan ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $f \in Im\omega \Rightarrow f = (a, v(x)b) = a(1,0) + b\big(0, v(x)\big) = af^{(1)} + bf^{(2)} \Rightarrow$

$$dim\, Im\omega = 2 \Rightarrow$$

$\omega - 2$ o‘lchamli operator bundan ω −kompakt ekanligi kelib chiqadi.

Veyl teoremasidan

$$\sigma_{ess}(h) = \sigma_{ess}(h_0 + \omega) = \sigma_{ess}(h_0)$$

$$\sigma(h) = \{0\} \cup \sigma_{ess}(h_0)$$

ko‘paytirish operatori spektri funksiya qiymatlar to‘plamining yopig‘iga teng, ya’ni:

$$\sigma_{ess}(h_{11}) = \overline{Imu(x)} = [m, M]$$

$$m \coloneqq \min u(x)$$

$$M \coloneqq \max u(x)$$

$$[m, M] = \sigma_{ess}(h)$$

$\mathbb{C} \setminus [m, M]$ sohada regular bo‘lgan

$$\Delta(z) = a - z + \int_{T^d} \frac{|v(t)|^2 dt}{u(t) - z}$$

funksiyani qaraymiz.

Odatda $\Delta(\cdot)$ funksiyaga h umumlashgan Fridrix modeliga mos Fredgolm determinant deyiladi. Quyidagi lemma h operator xos qiymatlari va $\Delta(\cdot)$ funksiyaning nollari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

Lemma. $z \in \mathbb{C} \setminus [m: M]$ soni h operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun

$$\Delta(z) = 0$$

bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot: Faraz qilaylik z soni h operator uchun xos qiymat va va $f = (f_0, f_1) \in H$ bu xos qiymatga mos xos vektor funksiya berilgan bo‘lsin, unday bo‘lsa $f = (f_0, f_1)$ vektor ushbu $hf = zf$ shartni qanoatlantiradi.

Yuqoridagi shartni ushbu ko‘rinishda ham yozish mumkin.

$$\begin{cases} (a - z)f_0 + \int v(t) f_1(t) dt \\ v(x) f_0 + (u(x) - z) f_1(t) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$z \in \mathbb{C} \setminus [m: M]$ bo‘lganligi uchun barcha $x \in T^d$ lar uchun $u(x) - z \neq 0$ bo‘ladi. Chunki z $u(x)$ ning qiymatlar to‘plamidan olinmagan.

(3) Tenglamalar sistemasining 2-tenglamasidagi $f_1(x)$ uchun

$$f_1(x) = \frac{-v(x)f_0}{u(x) - z} \tag{4}$$

ifodani topamiz. $f_1(x)$ uchun topilgan yuqoridagi (4) ifodani (3) tenglamalar sistemasining 1-tenglamasiga qo‘yamiz va quyidagi

$$(a - z)f_0 + \int v(t)\left(\frac{-v(x)f_0}{u(x) - z}\right)dt = 0$$

yoki

$$\left(a - z + \int \frac{|v(t)|^2 dt}{u(t) - z}\right)f_0 = 0$$

$$\Delta(z)f_0 = 0 \tag{5}$$

ifodalarni hosil qilamiz.

Agar (5) tenglikda $f_0 = 0$ bo‘lsa, u holda (4) tenglikka ko‘ra, $f_1(x) = 0$ bo‘ladi, ya’ni $f = (f_0, f_1) = \theta$ bo‘ladi. Bu esa $f = (f_0, f_1)$ vektorning xos vektor funksiya talabiga zid keladi. Shu sababdan $\Delta(z) = 0$ bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $z_0 \in \mathbb{C} \setminus [m: M]$ soni uchun $\Delta(z_0) = 0$ bo‘lsin. U holda koordinatalari

$$f_0 = const \neq 0 \text{ va } f_1(x) = \frac{-v(x)f_0}{u(x)-z} \tag{6}$$

bo‘lgan $f = (f_0, f_1)$ vektor $hf = z_0 f$ tenglikni qanoatlantirishini tekshirib ko‘ramiz.

Tenglikka eltib qo‘yamiz.

$$(a - z_0)f_0 + \int v(t)\left(\frac{-v(x)f_0}{u(x) - z}\right)dt = 0$$

$$\left(a - z_0 + \int \frac{|v(t)|^2 dt}{u(t) - z_0}\right) f_0 = v(x) f_0 + (u(x) - z_0) \frac{-v(x) f_0}{u(x) - z_0}$$

$$= v(x) f_0 - v(x) f_0 = 0$$

Yuqoridagi tenglikdan xulosa qilishimiz mumkinki z_0 soni h operator uchun xos qiymat bo‘ladi.

Xulosa. Ushbu maqolada umumlashgan Fridirixs modelining J-qo‘shma holi uchun spektral tahlilning ba'zi jihatlari ko‘rib chiqildi. Operatorning J-o‘z-o‘ziga qo‘shmalik shartlari v(x) funksiyasining sof mavhum bo‘lishini talab qilishi ko‘rsatildi. Veyl teoremasi yordamida operatorning muhim spektri [m,M] kesmadan iborat ekanligi aniqlandi. Muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlar Fredgolm determinanti Δ(z) ning nollari bilan ustma-ust tushishi isbotlandi.

Olingan natijalar J-qo‘shma operatorlar nazariyasini rivojlantirishda va ularning tatbiqlarini o‘rganishda foydali bo‘lishi mumkin. Kelgusida ushbu model uchun tarqalish masalasini o‘rganish va spektrning batafsilroq tahlilini o‘tkazish rejalashtirilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. T. Като Теория возмущений линейных операторов . Москва. Мир.1972.

2. Tretter C. Spectral theory of block operator matrices and applications. London. Imperial College Press. 2008. p.264.

3. Тошева, Н. А. О ветвях существенного спектра одной 3x3-операторной матрицы. Наука, техника и образование, (2-2), 44-47. (2021).

4.Tosheva N. A., Rasulov T. H. Main property of regularized Fredholm determinant corresponding to a family of operator matrices //European science. – 2020. – №. 2-2. – C. 11-14.

5. Tosheva N. A., Ismoilova D. E. Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining rezolventasi //Scientific progress. – 2021. – Т. 2. – №. 2. – С. 580-586.

6. Tosheva N. A., Ismoilova D. E. Ikki kanalli molekulyar-rezonans modelining sonli tasviri //Scientific progress. – 2021. – Т. 2. – №. 1. – С. 1421-1428.

7. Rasulov T., Tosheva N. Main property of regularized Fredholm determinant corresponding to a family of 3× 3 operator matrices //European science. – 2020. – Т. 2. – С. 51.

8. Tosheva N. A., Ismoilova D. E. The presence of specific values of the two-channel molecular-resonance model //Scientific progress. – 2021. – Т. 2. – №. 1. – С. 111-120.

9. Dilmurodov E.B., Rasulov T.H. Essential spectrum of a 2×2 operator matrix and the Faddeev equation // Physico-Mathematical Sciences.

10. Rasulov T.Kh. Study of the essential spectrum of a matrix operator // Theoret. and Math. Phys. – 2010. – Т. 164. – № 1. – Pp. 883–895.

11. Rasulov T.Kh., Botirov G.I. Numerical range of a generalized Friedrichs model // Zh. – 2013. – № 2. – P. 72–81.

12. Rasulov T.H., Bahronov B.I. Structure of the numerical range of Friedrichs model: 1D case with rank two perturbation // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. – № 4. – P. 21–28.

13. Rasulov T.H., Tretter C. Spectral inclusion for diagonally dominant unbounded block operator matrices // Rocky Mountain J. Math. – 2018. – № 1. – P. 279–324.

14. Langer H., Markus A.S., Matsaev V.I., Tretter C. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range // Linear Algebra Appl. – 2001. – Vol. 330. – № 1–3. – P. 89–112.

15. Дилмуродов Э.Б. Иккинчи тартибли операторли матрицаларнинг спектрал хоссалари: Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси. – Бухоро, 2021.

16. Расулов Т.Х., Дилмуродов Э.Б. Оценки для квадратичной числовой области значений одной операторной матрицы. Узбекский математический журнал. – 2015. – № 1. – С. 64–74.

17. Rasulov, H. (2021). Баъзи динамик системаларнинг сонли ечимлари ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 2(2).

18. Rasulov, H. (2021). Funksiyaning toʻla oʻzgarishini hisoblashdagi asosiy qoidalar. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 6(6).

19. Rasulov, H. (2021). One dynamic system with continuous time. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).

20. Rasulov, X. (2022). Об одной динамическойсистеме с непрерывным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

21. Rasulov, R. X. R. (2022). Buzilish chizig’iga ega kvazichiziqli elliptik tenglama uchun Dirixle-Neyman masalasi. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

22. Rasulov, R. X. R. (2022). Иккита перпендикуляр бузилиш чизиғига эга бўлган аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 22(22).

23. Rasulov, R. X. R. (2022). Бузилиш чизиғига эга бўлган квазичизиқли аралаш типдаги тенглама учун Трикоми масаласига ўхшаш чегаравий масала ҳақида. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

24. Rasulov, X. (2022). Краевые задачи для квазилинейных уравнений смешанного типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 8(8).

25. Rasulov, X. (2022). Об одной краевой задаче для нелинейного уравнения эллиптического типа с двумя линиями вырождения. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

26. Rasulov, X. (2022). О динамике одной квадратичной динамической системы с непреривным временем. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 18(18).

27. Rasulov, H. (2021). Boundary value problem for a quasilinear elliptic equation with two perpendicular line of degeneration. Центр научных публикаций (buxdu.Uz), 5(5).