УДК: **377.:517.2(575.1)**

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕР ПОРОЖДЕННЫХ ОДНИМ КЛАССОМ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ДВУХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ.

Х.Ж.Мейлиев

Университет экономики и педагогики

Ключевые слова: *Эргодические, пространство , мера, распределений, последовательност, множества, цилиндр, σ -алгебра, преобразования, сдвиг, стохастическая, случайных величини, квадратичный оператор, сюрьективен,*

Пусть (E,m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [1] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как это конструкция необходима нам для случая конечного множества E. [3].

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\})=P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $\mathrm{P_i}\geq 0$ и $\sum_{i=1}^{N}P_i=1$. Пусть $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $w=(w_1,w_2,...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n-функция, ставящая в соответствие точке $w\in\Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n називают n-й координатой функцией. Пусть $F-\sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{w:(\xi_n(w),\xi_{n+1}(w),...,\xi_{n+k-1}(w))\in A\}=\{w:(w_n,w_{n+1},...,w_{n+k-1})\in A\}$$

где A-подмножество прямого произведения $E^k=\prod_{i=1}^{k}E_i$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\}$ где i_j-элемент множества E, $n\le j\le n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω,F) однозначно определяется своими значениями

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=P\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\} \qquad (1)$$

на этих цилиндрах, где n-номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k-размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [1], если для множества функций $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} P_n(i_1,i_2,...,i_k)\ge 0 \\ \sum_{i=1}^{N}P_n(i_1,i_2,...,i_k,i)=P_n(i_1,i_2,...,i_k) \\ \sum_{i=1}^{N}P_n(i)=1 \end{cases} \qquad (2)$$

при всех k,n и $i_j\in E$, $1\le j\le k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=\sum_{i=1}^{N}P_n(i,i_1,i_2,...,i_k) \qquad (3)$$

при всех k,n и $i_j \in E$, $1 \le j \le k$, то мера P сохратяется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{P_n(i_1,i_2,...,i_k)$, n и k натуральные$\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$.

1. **Схема Бернулли**. Пусть $m(\{i\})=P_i$ - распределения на $E=\{1,2,...,N\}$. Если положить

$$P(i_1,i_2,...,i_k)=P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_k} \qquad (4)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2), (3). Соответствующая (4) мера называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность независимых одинаково распределенных случайных величини.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\text{Ï} =(P_{ij})_{i,j=1}^{N}$-стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_{k-1}i_k} \qquad (5)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера P называется марковской. Если вектор вероятностей $P=(P_1,P_2,...,P_N)$ удовлетворяет условию $P\text{Ï} =\text{Đ}$, то будет иметь место соотношение (3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$-конечное множество. Для квадратичного оператора $V:S^{N-1}\to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)}=Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $P_n(i)$ определим следующим образом:

$$P_n(i)=x_i^{(n-1)} \qquad (6)$$

для всех натуральных n и $i\in E$. Так как $x^{(n)}\in V^{(n)}(S^{N-1})\subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}(S^{N-1})=S^{N-1}$. Очевидно из (6) следует $\sum_{i=1}^{N}P_n(i)=1$, так как $x^{(n-1)}\in(S^{N-1})$.

Таким образом, одно из условий (2) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ при $k>1$ определим образом

$$P_n(i_0,i_1,...,i_k)=x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}\cdot P_{i_2m_3,i_3}.....P_{i_{k-1}m_k,}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)} \qquad (7)$$

По построению функции (6)-(7) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)}\in(S^{N-1})$ на E.

Первое условия (2), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{i=1}^{N}P_n(i_0,i_1,...,i_k,i)=x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}\cdot P_{i_2m_3,i_3}.....P_{i_{k-1}m_k,i_k}P_{i_km_{k+1},i}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_{k+1}}^{(n+k-1)}=$$

$$x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}.....P_{i_{k-1}m_k,i_k,}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)}=P_n(i_0,i_1,...,i_k)$$

так как $\sum_{i=1}^{N} P_{i_k m_{k+1},i} = 1$ и $\sum_{m_{k+1}=1}^{N} x_m^{(n+k)} = 1$.

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стюартом. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, $A\alpha$ è $\alpha\alpha$. Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAA\alpha,AA}, P_{AA\alpha\alpha,AA}, P_{A\alpha A\alpha,AA}$ и.т.д.-всего 27-переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1, \quad P_{AAA\alpha,AA} = 1/2, \quad P_{AA\alpha\alpha,AA} = 1/4, \quad P_{A\alpha A\alpha,AA} = 0, \ldots$$

для упрощения записи вместо $\{AA, A\alpha, \alpha\alpha\}$ будем рассматривать множество $E = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$P_{11,1}=1$ $P_{12,1}=P_{21,1}=1/2$ $P_{13,1}=P_{31,1}=0$ $P_{22,1}=1/4$ $P_{23,1}=P_{32,1}=0$ $P_{33,1}=0$

$P_{11,2}=0$ $P_{12,2}=P_{21,2}=1/2$ $P_{13,2}=P_{31,2}=1$ $P_{22,2}=1/2$ $P_{23,2}=P_{32,2}=1/2$ $P_{33,2}=0$ (8)

$P_{11,3}=0$ $P_{12,3}=P_{21,3}=0$ $P_{13,3}=P_{31,3}=0$ $P_{22,3}=1/4$ $P_{23,2}=P_{32,2}=1/2$ $P_{33,3}=1$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным (см. 6). В этом случае

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=(x_1^0+x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(1)}=2(x_1^0+x_2^0/2)(x_3^0+x_2^0/2) \\ x_3^{(1)}=(x_3^0+x_2^0/2)^2 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=(x_1^1+x_2^1/2)^2 \\ x_2^{(1)}=2(x_1^1+x_2^1/2)(x_3^1+x_2^1/2) \\ x_3^{(1)}=(x_3^1+x_2^1/2)^2 \end{cases} \tag{10}$$

или, подставляя в (10) выражения (9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=(x_1^0+x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(2)}=2(x_1^0+x_2^0/2)(x_3^0+x_2^0/2) \\ x_3^{(2)}=(x_3^0+x_2^0/2)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$

$$x^{(k)}=x^{(1)} \tag{11}$$

для любого $k>1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, $A\alpha$, $\alpha\alpha$, что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in S^2$ начальное распределение на $E=\{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$-вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 1.1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)}\in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = i_0, \xi_{k+1} = i_1) = P_{x^{(0)}}(i_k = i_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = i_1) + \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = i_1)}{2^{l-1}}\alpha \qquad (12)$$

где $\alpha \in M = \{1/2x_2^1,\ (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1),\ -1/2(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1),$

$-x_3^{(1)},\ 1/2(x_3-x_1)^2,\ 1/2(x_1+1/2x_2)(x_3-x_1),\ -(x_1+1/2x_2)^2\}$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$\{w: \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+1}(w) = i_1, ..., \xi_{k+1}(w) = i_i\}$

$P_{x^{(0)}}(\{w: \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+1}(w) = i_1, ..., \xi_{k+1}(w) = i_l\}) =$

$$= x_{i_0}^{(k)} \sum_{m_1,...,m_l=1}^{N} P_{i_0 m_1, i_1} \cdot P_{i_1 m_2, i_2} \cdot .....P_{i_{l-1} m_l, i_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} ... x_{m_l}^{(k+l-1)} \qquad (12)$$

откуда $P_{x^{(0)}}(\{w: \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+l}(w) = i_1\}) = x_i^{(k)} \sum_{m=1}^{N} P_{i_0 m, i_1} x_m^{(k)}$ (13)

При $l = 1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$P_{x^{(0)}}(\{w: \xi_k(w) = 1, \xi_{k+l}(w) = 1\}) = x_i^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{1m,1} x_m^{(k)} = x_1^{(1)}(x_1^{(1)} +$

$+1/2x_2^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)} =$

$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2P_{x^{(0)}} x_2^{(1)}$;

$P_{x^{(0)}}(\{w: \xi_k(w) = 2, \xi_{k+l}(w) = 2\}) = x_2^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{2m,2} x_m^{(k)} = x_2^{(1)} 1/2(x_1^{(1)} +$

$+x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2x_2^{(1)}(x_3 - x_1)^2 =$

$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k)(x_3 - x_1)^2$;

$P_{x^{(0)}}(\{w: \xi_k(w) = 3, \xi_{k+l}(w) = 3\}) = x_3^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{3m,3} x_m^{(k)} = x_3^{(1)}(x_3^{(1)} +$

$$+1/2x_2^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) + 1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k = 3)x_2^{(1)};$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = 1, \xi_{k+l}(w) = 2\}) = x_1^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{1m,2} x_m^{(k)} = x_1^{(1)}(x_3^{(1)} +$$

$$+1/2x_2^{(1)}) = x_1^{(1)}x_2^{(1)} + x_1^{(1)}x_3^{(1)} - 1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = 1, \xi_{k+l}(w) = 3\}) = x_1^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{1m,3} x_m^{(k)}$$

$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) - P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)(x_3 + 1/2x_2)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = 2, \xi_{k+l}(w) = 3\}) = x_2^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{2m,3} x_m^{(k)} =$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) + P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_1 - x_3).$$

•Предложим, что равенство (12) доказано для натурального $l > 1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением .

$$P_{i_0 i_1,k}^{[s,t+1]} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} P_{i_0 i_1,k}^{[s,t]} P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]} x_\beta^t$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{i_0 m,k}^{[k,k+l+1]} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{i_0 m,\alpha}^{[k,k+l]} P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]} x_\beta^{[k+l]} \tag{14}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w : \xi_k(w) = i_0, \xi_{k+l+1}(w) = i_1\}) = x_{i_0}^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{i_0 m,i_1}^{[k,k+l+1]} x_m^{(k)} =$$

$$x_{i_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{i_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}\right)x_m^{(k)}=$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}x_{i_0}^{(k)}\left(\sum_{m=1}^{3}P_{i_0m,\alpha}^{[k,k+l]}x_m^{(k)}\right)P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}=$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+1}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{(k)}$$

В силу (2)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=i_0,\xi_{k+l+1}=i_1)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+l}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}x_\beta^{(1)} \tag{15}$$

Тепер, как и в случае $l=1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрием только одного случая. Остальые случаи доказываются аналогично[1-6]. Пусть $i_0=i_1=1$ и $l=2$.

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+2}=1)=\sum_{\alpha=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=\alpha)\sum_{\beta=1}^{3}P_{\alpha\beta,1}x_\beta^1=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3)(P_{31,1}x_1^{(1)}+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)})=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$

$$(x_1^{(1)})^3+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_1^{(1)}/4+$$

$$(x_1^{(1)})^2x_1^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_2^{(1)}/4+(x_1^{(1)})^2(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)/2+$$

$$1/4x_1^{(1)}x_2^{(1)}(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/4P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=1)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=3,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(1/2x_2+x_3)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(-(x_2+2x_3)^2)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(1/2x_2+x_3)(x_1-x_3)$$

Легко доказывается также как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (15)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l+1}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=1)(P_{11.1}x_1^{(1)}+P_{12.1}x_2^{(1)}+P_{13.1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)(P_{21.1}x_1^{(1)}+P_{22.1}x_2^{(1)}+P_{23.1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=3)(P_{31.1}x_1^{(1)}+P_{32.1}x_2^{(1)}+P_{33.1}x_3^{(1)})=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$

$$= x_1^{(1)} x_1^{(k+l)} (x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_2 + x_3) + 1/2^l x_1^{(1)} (x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2)$$

$$(2x_1 + x_2 + x_3 - x_1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) \; P_{x^{(0)}} \xi_{k+l+1} = 1) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) x_2^{(1)} / 2$$

что и требовалось показать.

Разюме

Ушбу мақолада ўлчовли фазо қаралади. Фараз қилайлик чеклли ўлчовли тақсимотлар оиласи ёрдамидаги (E, m) ихтиёрий ўлчовли фазо бўлсин. $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, фазони қараймиз, бу ерда ҳамма натурал i сонлар учун $E_i = E$ дир. Мендель ўлчови P ва Бернулли ўлчови Q сингулярдлиги исботланган[7-19].

Разюме

В данной статье изучаются пространство с мерой. Пусть (E, m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, с помошию согласованное семейство конечномерных распределений, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Дано доказательство сингулярности Менделевская мера P и Бернуллиевская мера Q.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.-624с.

2. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М., Просвещение, 1968.-308 с.

3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Сборник задач по курсу функционального анализа. М.:Наука.1979.

4. Садовничий В.А. Теория операторов. М.:Дрофа. 2004,-382с.

5. Городецкий В.В. и др. Методы решения задач по функциональному анализу. Киев. 1990.-479\М.

6. Мейлиев Х.Ж., Гуломов О.Х. (Кар ГУ).

7. Umirzakov B.E., Tashatov A.K., Mustafoeva N.M. // On the band-gap width of $NiSi_2$ nanocrystals created in the surface region of Si using ion implantation // ISSN 1027-4510, Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 415–418. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023. DOI 10.1134/S1027451023020106

8. Donaev S., Maksumkhanova A., Shafkarov B., Mustafoeva N.. //The dependence of the parameters of energy bands on the depth of the ion-doped layer for Si implanted with ions Ba^+ // AIP Conference Proceedingsthis link is disabled, 2022, 2686, 020004. Pp.956-960 https://doi.org/10.1063/5.0111872

9. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Эгамбердиева О.Ш. // Изучение зонно структуры на приповерхностных слоев Si, имплантированного ионами бария // ҚарДУ хабарлари. – Қарши, 2022.– №1(51). с.23-28

10. Мустафоева Н.М.. // Состояния скрытых нанокристаллов $NiSi_2$, созданных в приповерхностной области Si// Вестник КГУ им. Бердаха. №7 (57) 2023.с. 38-40

11. Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М.. //Исследование Физические Свойства Нанопленок Nisi2/Si// Таълим ва ривожланиш таҳлили онлайн илмий журнали, 2022 йил октябр, Vol. 2 No. 10 (2022). с 244-246

12. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М., Жуманов Ш.А.. //Получение многослойной наносистемы Si/NiSi2/Si, методом твердофазного осаждения// QarDU xabarlari Ilmiy-nazariy, uslubiy jurnal , 2024 (1)2 С.10-15

13. Ташатов А.К., Мустафаева Н. М.. // Ширина запрещенной зоны скрытых нанокристаллов $NiSi_2$, созданных в приповерхностной области Si// Mirzo ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti ilmiy jurnali,

Tabiiy fanlar turkumi, 2024. 3/1, C.508-512

14. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Investigation of Physical Properties of Nisi 2/Si Nanofilm// Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP). Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.9-11

15. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Surface Morphology of $NiSi_2$ /Si Films Produced By Solid-Phase Epitaxy// Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP) Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.5-8

16. Ташатов А. К., Мустафоева Н.М.. //Нанопленок CoSi2 На Поверхности Si при твердофазном осаждени// Miasto Przyszłości Kielce, Polsha, Vol. 25 (2022): pp.149-151

17. Мустафоева Н.М.. //Анализ состояния скрытых нанокристаллов NiSi2,
созданных в приповерхностной области Si// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.112-116

18. Мустафоева Н.М.. //Морфология и состав поверхности пленок NiSi2/Si,
полученных методом твердофазной эпитаксии// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.117-122

19. Мустафоева Н.М.. //Анализ состояния латентных нанокристаллов $NiSi_2$, созданных методом ионной имплантации в области кремния// Kielce: Laboratorium Wiedzy Artur Borcuch. International Journal of Economy and Innovation | Gospodarka i Innowacje Volume: 33 | 2023. Economy and Innovation ISSN: 2545-0573. C-275-277

20.