



УДК: 377.:517.2(575.1)

## В ОДНОМ КЛАССЕ СЮРЪЕКТИВНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА $S^3$ .

Х.Ж.Мейлиев

Университет экономики и педагогики

*Анотация.* Любой сюръективный квадратичный оператор определенный на симплексе  $S^3$ , соответствует некоторому само совмещению  $\pi_l, l = \overline{1,2,4}$ .

*Квадратичный оператор, определенный на симплексе  $S^3$ , сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен.*

*Ключевые слова.* сюръективный, квадратичный, оператор, симплекс, гомеоморфизмом. биективен.. само совмещения, тетраэдр, преобразования, группа, вершина, перемещение, выпуклая, линейная, комбинация, композиция.

### Введение

В статье исследуются следующие задачи, связанные с изучением сюръективных квадратичных операторов:  $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$  где  $S^{n-1}$  симплекс и  $V$ -квадратичный оператор, определенный на  $S^{n-1}$ . На

$S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_l \geq 0, l = \overline{1,4}; \sum_{l=1}^4 x_l = 1 \right\}$  произвольный квадратичный оператор

$V$ , заданный следующим образом

$$(Vx)_k = \sum_{l,j=1}^4 P_{lj,k} x_l x_j, \quad k = \overline{1,4} \quad (1)$$

$$\text{где } P_{l,j,k} \geq 0, \quad P_{l,j,k} = P_{jl,k}, \quad \sum_{l,j=1}^4 P_{l,j,k} = 1.$$

Однозначно определяется следующей матрицей



$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} P_{11,1} & P_{22,1} & P_{33,1} & P_{44,1} & P_{12,1} & P_{13,1} & P_{14,1} & P_{23,1} & P_{24,1} & P_{34,1} \\ P_{11,2} & P_{22,2} & P_{33,2} & P_{44,2} & P_{12,2} & P_{13,2} & P_{14,2} & P_{23,2} & P_{24,2} & P_{34,2} \\ P_{11,3} & P_{22,3} & P_{33,3} & P_{44,3} & P_{12,3} & P_{13,3} & P_{14,3} & P_{23,3} & P_{24,3} & P_{34,3} \\ P_{11,4} & P_{22,4} & P_{33,4} & P_{44,4} & P_{12,4} & P_{13,4} & P_{14,4} & P_{23,4} & P_{24,4} & P_{34,4} \end{array} \right] \text{ где } 0 \leq p_{l,j,k} \leq 1.$$

Мы определим 24 класса сюръективных квадратичных операторов и докажем, что они исчерпывают все множество сюръективных квадратичных операторов. Для описания этих классов воспользуемся хорошо известными группами само совмещений правильных многогранников [1], так как  $S^3$  является правильным тетраэдром.

Заметим, что под само совмещением понимается перемещение, т.е. преобразование, сохраняющее метрику. Группа само совмещений тетраэдра в  $R^3$  состоит из 12 элементов. Но мы рассматриваем симплекс в  $R^4$  тогда несложно показать, что группа само совмещений тетраэдра,  $G$  в  $R^4$  состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра т.е.  $G = \{\pi_l\}_{l=1}^{24}$

Будем говорить, что квадратичный оператор  $V$ , определенный на симплексе  $S^3$ , соответствует некоторому само совмещению  $\pi_l$ , если  $V$  переводит вершины симплекса  $S^3$  в вершины и ребра симплекса в ребра таким же образом, как само совмещение  $\pi_l, l = \overline{1,24}$ .

### 1 .Сюръективный квадратичный оператор

Докажем, что любой сюръективный квадратичный оператор соответствует некоторому само совмещению.

**Теорема 1.** Любой сюръективный квадратичный оператор, определенный на симплексе  $S^3$ , соответствует некоторому само совмещению  $\pi_l, l = \overline{1,24}$ .

Доказательство теоремы 1 сведем к доказательству следующих трех лемм.



**Лемма 1.** Пусть  $V$ -сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренняя точка симплекса  $S^3$  не может перейти при отображении  $V$  в одну из вершин симплекса.

**Доказательство.** Пусть  $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Int}S^3$  и  $V(A) = A_l$  для некоторого  $l = 1, 2, 3, 4$  где  $A_l$  вершины. Рассмотрим случай  $l = 1$  (остальные случаи рассматриваются точно так же). Из равенства  $V(A) = A_l$  следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= a_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\xi_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4 \\ 0 &= a_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2x_3^2 + d_2x_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\xi_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4 \\ 0 &= a_3x_1^2 + b_3x_2^2 + c_3x_3^2 + d_3x_4^2 + 2\alpha_3x_1x_2 + 2\beta_3x_1x_3 + 2\gamma_3x_1x_4 + 2\xi_3x_2x_3 + 2\eta_3x_2x_4 + 2\delta_3x_3x_4 \\ 0 &= a_4x_1^2 + b_4x_2^2 + c_4x_3^2 + d_4x_4^2 + 2\alpha_4x_1x_2 + 2\beta_4x_1x_3 + 2\gamma_4x_1x_4 + 2\xi_4x_2x_3 + 2\eta_4x_2x_4 + 2\delta_4x_3x_4 \end{aligned}$$

т.к.  $x_1x_2x_3x_4 > 0$ , то отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \alpha_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \xi_1 = \eta_1 = \delta_1 = 1 \\ \alpha_l = b_l = c_l = d_l = \alpha_l = \beta_l = \gamma_l = \xi_l = \eta_l = \delta_l = 0 \quad l = 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Тогда для любой точки  $A \in S^3$ ,  $V(A) = A_1$ , т.е.  $V(S^3) = A_1$  что противоречит его сюръективности.

**Лемма 2.** Пусть  $V$  сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренняя точка симплекса  $S^3$  не может перейти при перемещении  $V$  в граничную точку симплекса.

**Доказательство.** Пусть  $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \text{Int}S^3$ , т.е.  $x_1x_2x_3x_4 > 0$ .

Положим для определенности, что  $V(A) \in [A_3, A_4]$  тогда из равенства

$$\begin{aligned} x'_1 = 0 &= \alpha_1x_1^2 + b_1x_2^2 + c_1x_3^2 + d_1x_4^2 + 2\alpha_1x_1x_2 + 2\beta_1x_1x_3 + 2\gamma_1x_1x_4 + 2\xi_1x_2x_3 + 2\eta_1x_2x_4 + 2\delta_1x_3x_4 \\ x'_2 = 0 &= \alpha_2x_1^2 + b_2x_2^2 + c_2x_3^2 + d_2x_4^2 + 2\alpha_2x_1x_2 + 2\beta_2x_1x_3 + 2\gamma_2x_1x_4 + 2\xi_2x_2x_3 + 2\eta_2x_2x_4 + 2\delta_2x_3x_4 \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \xi_1 = \eta_1 = \delta_1 = 0 \\ a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = \xi_2 = \eta_2 = \delta_2 = 0 \end{aligned}$$

Тогда для любой точки  $A \in S^3$  получим  $V(A) \in [A_3, A_4]$  т.е.  $V(S^3) \in [A_3, A_4]$ , что противоречит сюръективности.



**Лемма 3.** Пусть  $V$ - сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая граничная точка, отличная от вершин, не может перейти при отображении  $V$  в одну из вершин симплекса.

**Доказательство.** Пусть  $A = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \partial S^3$ ,  $A \neq A_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  и предположим для определенности  $A \in [A_1, A_4]$ . Мы должны доказать, что  $V(A) \neq A_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ . Предположим противное и пусть для определенности  $V(A) = A_l$ . Тогда

$$1 = \alpha_1 x_1^2 + b_1 x_2^2 + c_1 x_3^2 + d_1 x_4^2 + 2\alpha_1 x_1 x_2 + 2\beta_1 x_1 x_3 + 2\gamma_1 x_1 x_4 + 2\xi_1 x_2 x_3 + 2\eta_1 x_2 x_4 + 2\delta_1 x_3 x_4$$

$$0 = \alpha_2 x_1^2 + b_2 x_2^2 + c_2 x_3^2 + d_2 x_4^2 + 2\alpha_2 x_1 x_2 + 2\beta_2 x_1 x_3 + 2\gamma_2 x_1 x_4 + 2\xi_2 x_2 x_3 + 2\eta_2 x_2 x_4 + 2\delta_2 x_3 x_4$$

$$0 = \alpha_3 x_1^2 + b_3 x_2^2 + c_3 x_3^2 + d_3 x_4^2 + 2\alpha_3 x_1 x_2 + 2\beta_3 x_1 x_3 + 2\gamma_3 x_1 x_4 + 2\xi_3 x_2 x_3 + 2\eta_3 x_2 x_4 + 2\delta_3 x_3 x_4$$

$$0 = \alpha_4 x_1^2 + b_4 x_2^2 + c_4 x_3^2 + d_4 x_4^2 + 2\alpha_4 x_1 x_2 + 2\beta_4 x_1 x_3 + 2\gamma_4 x_1 x_4 + 2\xi_4 x_2 x_3 + 2\eta_4 x_2 x_4 + 2\delta_4 x_3 x_4$$

откуда  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = \alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = \xi_1 = \eta_1 = \delta_1 = 0$ ,  $l = 2, 3, 4$ .

Следовательно, для любой точки  $A \in [A_1, A_4]$ ,  $V(A) = A_1$ , т.е.  $V([A_1, A_4]) = A_1$  что, как легко видеть, противоречит сюръективности.

**Доказательство теоремы 1.** В силу лемм 1-3 сюръективный квадратичный оператор переводит вершины симплекса в вершины и ребра в ребра, т.е. сюръективному квадратичному оператору соответствует некоторое само совмещение  $\pi_l$ ,  $l = \overline{1, 2, 4}$ .

## 2 .Обсуждение и. результаты

Определим теперь, какого вида квадратичные операторы соответствуют каждому само совмещению правильного тетраэдра.

Начнем с тождественного само совмещения  $\pi_1$ . Квадратичный оператор  $V$ , соответствующий этому само совмещению, должен удовлетворять следующим условиям:  $V(A_l) = A_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$  и также

$$V([A_1, A_2]) = [A_1, A_2], \quad V([A_1, A_3]) = [A_1, A_3], \quad V([A_1, A_4]) = [A_1, A_4]$$

$$V([A_2, A_3]) = [A_2, A_3], \quad V([A_2, A_4]) = [A_2, A_4], \quad V([A_3, A_4]) = [A_3, A_4]$$



Если переписать эти условия с помощью теоремы 1, учитывая, что  $A_1(1,0,0,0), A_2(0,1,0,0), A_3(0,0,1,0), A_4(0,0,0,1)$  то получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_{11,1} &= 1 & P_{22,1} &= 0 & P_{33,1} &= 0 & P_{44,1} &= 0 \\ P_{11,2} &= 0 & P_{22,2} &= 1 & P_{33,2} &= 0 & P_{44,2} &= 2 \\ P_{11,3} &= 0 & P_{22,3} &= 0 & P_{33,3} &= 1 & P_{44,3} &= 0 \\ P_{11,4} &= 0 & P_{22,4} &= 0 & P_{33,4} &= 0 & P_{44,4} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь, так как произвольная точка, принадлежащая ребру  $[A_1, A_2]$  имеет координаты  $(x_1, 1-x_1, 0, 0)$  то из  $V([A_1, A_2]) = [A_1, A_2]$  имеем

$$0 = x'_3 = P_{11,3}x_1^2 + P_{22,3}(1-x_1)^2 + 2P_{12,3}x_1(1-x_1)$$

$$0 = x'_4 = P_{11,4}x_1^2 + P_{22,4}(1-x_1)^2 + 2P_{12,4}x_1(1-x_1)$$

И из (1) следует, что  $2P_{12,3} = 0, 2P_{12,4} = 0$  откуда  $P_{12,3} = 0, P_{12,4} = 0$ ; аналогично из  $V([A_1, A_3]) = [A_1, A_3], V([A_1, A_4]) = [A_1, A_4], V([A_2, A_3]) = [A_2, A_3], V([A_2, A_4]) = [A_2, A_4], V([A_3, A_4]) = [A_3, A_4]$ . Имеем

$$P_{23,1} = 0, P_{24,1} = 0, P_{34,1} = 0, P_{13,2} = 0, P_{14,2} = 0, P_{14,3} = 0, P_{24,3} = 0, P_{34,2} = 0, P_{13,4} = 0, P_{23,2} = 0$$

Таким образом, квадратичные операторы, соответствующие само совмещению  $\pi_1$ , имеют следующий вид:

$$V_1(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\eta & 1-\delta \end{bmatrix} \quad \text{где } \alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta \in [0,1]$$

произвольные числа.

Очевидно, что выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов, соответствующих само совмещению  $\pi_1$ , также соответствует этому само совмещению.

Покажем, что квадратичный оператор  $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  отвечающий само совмещению  $\pi_1$ , совпадает с само совмещением  $\pi_1$ .



Действительно, при  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta = 1/2$  квадратичный оператор  $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  является тождественным оператором, т.к.

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 \\ x'_2 = x_2^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_2x_4 \\ x'_3 = x_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3x_4 \\ x'_4 = x_4^2 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x'_1 = x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_2 = x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_4 = x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

откуда в силу того, что  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ , получим, что  $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$  совпадает с само совмещением  $\pi_1$ .

Для квадратичных операторов класса  $V_1(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$  преобразование (1) принимает вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1^2 + 2\alpha x_1 x_2 + 2\beta x_1 x_3 + 2\gamma x_1 x_4 \\ x'_2 = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1x_2 + 2\xi x_2x_3 + 2\eta x_2x_4 \\ x'_3 = x_3^2 + 2(1-\beta)x_1x_3 + 2(1-\xi)x_2x_3 + 2\delta x_3x_4 \\ x'_4 = x_4^2 + 2(1-\gamma)x_1x_4 + 2(1-\eta)x_4x_2 + 2(1-\delta)x_3x_4 \end{cases}$$

Откуда после некоторых преобразований получаем

$$\begin{cases} x'_1 = x_1[1 + (2\alpha - 1)x_2 + (2\beta - 1)x_3 + (2\gamma - 1)x_4] \\ x'_2 = x_2[1 + (1 - 2\alpha)x_1 + (2\xi - 1)x_3 + (2\eta - 1)x_4] \\ x'_3 = x_3[1 + (1 - 2\beta)x_1 + (1 - 2\xi)x_2 + (2\delta - 1)x_4] \\ x'_4 = x_4[1 + (1 - 2\gamma)x_1 + (1 - 2\eta)x_2 + (1 - 2\delta)x_3] \end{cases} \quad (3)$$

Квадратичный оператор вида (3) относится к классу вольтеровских операторов. Этот класс операторов рассмотрен в [3]. В частности, для вольтеровских квадратичных операторов доказано, что операторы такого типа являются взаимно однозначными и, взаимно непрерывными операторами [14]. Отсюда имеем следующее.

**Предложение 1.** Любой сюръективный квадратичный оператор, соответствующий само совмещению  $\pi_l, l = \overline{1, 24}$ , является гомеоморфизмом симплекса  $S^3$ .



Не повторяя достаточно простых выкладок, проделанных выше, приведем описание классов сюръективных квадратичных операторов, соответствующих остальным само совмещениям  $\pi_l$ ,  $l = \overline{2,24}$ . Сюръективный квадратичный оператор  $V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$ , соответствующий само совмещению  $\pi_l$ , определяется следующим образом.

Рассмотрим случай, когда  $\pi_l$ , имеет следующий вид:

(остальные случаи рассматриваются аналогично).

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Квадратичный оператор  $V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$  само совмещениям этому само совмещению, имеет следующий вид:

Само совмещению, имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \eta & \delta \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 1-\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \xi & 1-\eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & 1-\delta \end{bmatrix} \quad (5)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta \in [0,1]$ - произвольные числа[1-8]. В этом случае преобразование (1) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_4^2 + 2\eta x_4 x_2 + 2\eta x_1 x_4 + 2\delta x_3 x_4 \\ x'_2 = x_1^2 + 2(1-\gamma)x_1 x_4 + 2\alpha x_2 x_1 + 2\beta x_1 x_3 \\ x'_3 = x_2^2 + 2(1-\alpha)x_1 x_2 + 2(1-\eta)x_2 x_4 + 2\xi x_3 x_2 \\ x'_4 = x_3^2 + 2(1-\beta)x_1 x_3 + 2(1-\xi)x_3 x_2 + 2(1-\delta)x_3 x_4 \end{cases}$$

Откуда после некоторых преобразований получаем



$$\begin{cases} x'_1 = x_4 [1 + (2\gamma - 1)x_1 + (2\eta - 1)x_2 + (2\delta - 1)x_3] \\ x'_2 = x_1 [1 + (1 - 2\gamma)x_2 + (2\beta - 1)x_3 + (2\alpha - 1)x_4] \\ x'_3 = x_2 [1 + (1 - 2\alpha)x_1 + (1 - 2\eta)x_4 + (2\xi - 1)x_3] \\ x'_4 = x_3 [1 + (1 - 2\beta)x_1 + (1 - 2\xi)x_2 + (1 - 2\delta)x_4] \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что при  $\alpha = \beta = \gamma = \xi = \eta = \delta = 1/2$  квадратичный оператор (5) совпадает с само совмещением (4). аналогично в остальных случаях при  $\alpha = \beta = \gamma = \xi = \eta = \delta = 1/2$  квадратичный оператор  $V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$  совпадает с само совмещением  $\pi_l, l = \overline{1, 2, 4}$ . Повторяя приведенные выше рассуждения, можно дать описание классов сюръективных квадратичных операторов, соответствующих остальным само совмещениям  $\pi_l, l = \overline{1, 2, 4}$ .

Обозначим через  $\tilde{v}_l$  совокупность всех сюръективных квадратичных операторов вида  $V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta), l = \overline{1, 2, 4}$ .

Из построения следует

**Предложения 2.** Для любого  $l = \overline{1, 2, 4}$  выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов из  $\tilde{v}_l$  опять принадлежит  $\tilde{v}_l$ .

**Теорема 2.** Любой сюръективный оператор является гомеоморфизмом симплекса  $S^3$ .

**Доказательство.** Из теоремы 1 следует, что произвольный сюръективный квадратичный оператор принадлежит одному из классов  $\tilde{v}_l, l = \overline{1, 2, 4}$ . При  $l = 1$  это утверждение доказано в предложении 1.

Пусть  $l \neq 1$ . Тогда квадратичный оператор  $V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$  является композицией двух преобразований.

$$V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta) = V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2) V_l(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta). \quad \text{Здесь}$$

оператор  $V_1(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$  является гомеоморфизмом в силу предложения 1, а преобразование  $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ , совпадающее с само



совмещением  $\pi_l$ , очевидно, является гомеоморфизмом. Так как композиция двух гомеоморфизмов является гомеоморфизмом, то отсюда следует утверждение теоремы 2.

В качестве следствия приведем следующую теорему.

**Теорема 3.** Квадратичный оператор, определенный на симплексе  $S^3$ , сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Доказательство. Из рассмотренных выше случаев видно, что квадратичные операторы  $V_l$  из  $\tilde{v}_l$  при любых  $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta \in [0,1]$  являются взаимно однозначными отображениями симплекса  $S^3$  на  $S^3$ .

### Заключение

В статье исследованы сюръективных квадратичных операторов  $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$  где  $S^{n-1}$  симплекс и  $V$ - квадратичный оператор, определенный на

Мы определили 24 классов сюръективных квадратичных операторов и доказали, что они исчерпывают все множество сюръективных квадратичных операторов.

Мы рассмотрели симплекс в  $R^4$  тогда несложно показали, что группа само совмещений тетраэдра,  $G$  в  $R^4$  состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра т.е.  $G = \{\pi_l\}_{l=1}^{24}$

Доказали, что 1.Квадратичный оператор  $V$ , определенный на симплексе  $S^3$ , соответствует некоторому само совмещению  $\pi_l$ , если  $V$  переводит вершины симплекса  $S^3$  в вершины и ребра симплекса в ребра таким же образом, как само совмещение  $\pi_l, l = \overline{1,24}$ .

2.Любой сюръективный квадратичный оператор, соответствующий само совмещению  $\pi_l, l = \overline{1,24}$ , является гомеоморфизмом симплекса  $S^3$ .



3. Для любого  $l = \overline{1,24}$  выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов из  $\tilde{v}_l$  опять принадлежит  $\tilde{v}_l$ .

4. Любой сюръективный оператор является гомеоморфизмом симплекса  $S^3$ .

5. Квадратичный оператор, определенный на симплексе  $S^3$ , сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен[9-20].

Т.е. можно изучат все свойство сюръективный квадратичный операторы определеннй на симплексе  $S^3$ , с помаши 24 сюръективных квадратичных операторов.

### Литературы

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.
2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.
3. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.
4. Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.
5. Абдирасулов, Х., Холбеков, Ш. О. (2022). Применение бета и гамма функцией к вычислению некоторых важных в прикладных задачах. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(4), 955-963.
6. Xolbekov, S.O.,Omonova, N.R. (2022). A-analitik funksiyalarning umumlashmasini operatorlar yordamida kiritilishi. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(4), 946-954.
7. Мейлиев, Х. Ж., Холбеков, Ш. О. (2021). НЕПОДВИЖНЫЙ ТОЧКИ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА  $S^1 * S^1$ .



- Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(10), 1152-1155.
8. Meyliev, K.J., Kholbekov, S.O. (2021). Voltaire quadratic stochastic operators of a bisexual population. *ACADEMICIA: An International Multidisciplinary Research Journal*, 11(5), 56-64.
9. Umirzakov B.E., Tashatov A.K., Mustafoeva N.M. // On the band-gap width of NiSi<sub>2</sub> nanocrystals created in the surface region of Si using ion implantation // ISSN 1027-4510, *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 415–418. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023. DOI 10.1134/S1027451023020106
10. Donaev S., Maksumkhanova A., Shafkarov B., Mustafoeva N. // The dependence of the parameters of energy bands on the depth of the ion-doped layer for Si implanted with ions Ba<sup>+</sup> // *AIP Conference Proceedings* this link is disabled, 2022, 2686, 020004. Pp.956-960 <https://doi.org/10.1063/5.0111872>
11. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Эгамбердиева О.Ш. // Изучение зонно структуры на приповерхностных слоев Si, имплантированного ионами бария // *ҚарДУ хабарлари. – Қарши, 2022. – №1(51). с.23-28*
12. Мустафоева Н.М. // Состояния скрытых нанокристаллов NiSi<sub>2</sub>, созданных в приповерхностной области Si // *Вестник КГУ им. Бердаха. №7 (57) 2023.с. 38-40*
13. Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М. // Исследование Физические Свойства Нанопленок NiSi<sub>2</sub>/Si // *Таълим ва ривожланиш таҳлили онлайн илмий журнали, 2022 йил октябр, Vol. 2 No. 10 (2022). с 244-246*
14. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М., Жуманов Ш.А. // Получение многослойной наносистемы Si/NiSi<sub>2</sub>/Si, методом твердофазного осаждения // *QarDU xabarlari Ilmiy-nazariy, uslubiy jurnal , 2024 (1)2 С.10-15*



15. Ташатов А.К., Мустафаева Н. М. // Ширина запрещенной зоны скрытых нанокристаллов NiSi<sub>2</sub>, созданных в приповерхностной области Si// Mirzo ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti ilmiy jurnali, Tabiiy fanlar turkumi, 2024. 3/1, С.508-512
16. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Investigation of Physical Properties of Nisi 2/Si Nanofilm// Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP). Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.9-11
17. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Surface Morphology of NiSi<sub>2</sub> /Si Films Produced By Solid-Phase Epitaxy// Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP) Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.5-8
18. Ташатов А. К., Мустафоева Н.М. //Нанопленок CoSi<sub>2</sub> На Поверхности Si при твердофазном осаждении// Miasto Przyszłości Kielce, Polsha, Vol. 25 (2022): pp.149-151
19. Мустафоева Н.М. //Анализ состояния скрытых нанокристаллов NiSi<sub>2</sub>, созданных в приповерхностной области Si// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.112-116
20. Мустафоева Н.М. //Морфология и состав поверхности пленок NiSi<sub>2</sub>/Si, полученных методом твердофазной эпитаксии// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.117-122
21. Мустафоева Н.М. //Анализ состояния латентных нанокристаллов NiSi<sub>2</sub>, созданных методом ионной имплантации в области кремния// Kielce: Laboratorium Wiedzy Artur Borcuch. International Journal of Economy and Innovation | Gospodarka i Innowacje Volume: 33 | 2023. Economy and Innovation ISSN: 2545-0573. C-275-277