



УДК: 377.:517.2(575.1)

ЭРГОДИЧЕСКОЕ СВОЙСТВА КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Х.Ж.Мейлиев

Университет экономики и педагогики

Любой сюръективный квадратичный оператор определенный на симплексе S^3 , соответствует некоторому само совмещению $\pi_l, l = \overline{1,4}$.

Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3 , сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Ключевые слова. сюръективный, квадратичный, оператор, симплекс, гомеоморфизм, биективен.. само совмещения, тетраэдр, преобразования, группа, вершина, перемещение, выпуклая, линейная, комбинация, композиция.

Введение

В статье исследуются следующие задачи, связанные с изучением сюръективных квадратичных операторов: $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$ где S^{n-1} симплекс и V -квадратичный оператор, определенный на S^{n-1} . На $S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_l \geq 0, l = \overline{1,4}; \sum_{l=1}^4 x_l = 1 \right\}$ произвольный квадратичный оператор V , заданный следующим образом

$$(Vx)_k = \sum_{l,j=1}^4 P_{lj,k} x_l x_j, \quad k = \overline{1,4} \quad (1)$$

$$\text{где } P_{lj,k} \geq 0, \quad P_{lj,k} = P_{jl,k}, \quad \sum_{l,j=1}^4 P_{lj,k} = 1.$$

Пусть (E, m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i . Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является



задача построения меры P на Ω , согласованной с мерой m на E . Для этого достаточно по теореме Колмогорова [14-20] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как эта конструкция необходима нам для дальнейшего изложения, приведем её для случая конечного множества E [1-3].

Пусть $E = \{1, 2, \dots, N\}$ и $m(\{i\}) = P_i$ - вероятностная мера на E , т.е.

$P_i \geq 0$ и $\sum_{l=1}^N p_l = 1$. Пусть $\Omega = \prod_{l=1}^{\infty} E_l$, где $E_l = E$ для всех натуральных l .

Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots)$ элементов множества E . Пусть ξ_n - функция, ставящая в соответствие точке $\omega \in \Omega$ значение ω_n ее n -й координаты. Функцию ξ_n называют n -й координатой функцией. Пусть F - σ -алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : (\xi_n(\omega), \xi_{n+1}(\omega), \dots, \xi_{n+k-1}(\omega)) \in A\} = \{\omega : (\omega_n, \omega_{n+1}, \dots, \omega_{n+k-1}) \in A\}$$

где A - подмножество прямого произведения $E^k = \prod_{l=1}^k E_l$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения [4-12]. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, \dots, \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\},$$

где l_j - элемент множества E , $n \leq j \leq n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω, F) однозначно определяется своими значениями



$$p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) = P\{\omega: \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, \dots, \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\} \quad (2)$$

на этих цилиндрах, где n -номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k -размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [21], если для множества функций $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) \geq 0 \\ \sum_{l=1}^N p_n(l_1, l_2, \dots, l_k, l) = p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) \\ \sum_{l=1}^N p_n(l) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \leq j \leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на F , для которой имеет место (2); кроме того, если

$$p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) = \sum_{l=1}^N p_n(l, l_1, l_2, \dots, l_k) \quad (4)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \leq j \leq k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{p_n(l_1, l_2, \dots, l_k), n \text{ и } k \text{ натуральные}\}$, удовлетворяющих условию (3). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$.

1. **Схема Бернулли.** Пусть $m(\{l\}) = p_l$ - распределения на $E = \{1, 2, \dots, N\}$. Если положить

$$p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) = p_{l_1} p_{l_2} \dots p_{l_k} \quad (5)$$



т.е. $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$ не зависит от n , то имеют место соотношения (4), (3.1.3). Соответствующая (3.1.4) мера P называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. Схема Маркова. Пусть $\Pi = (p_{lj})_{l,j=1}^N$ -стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$p_n(l_1, l_2, \dots, l_k) = p_{l_1} p_{l_1 l_2} \dots p_{l_{k-1} l_k} \quad (6)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$ не зависит от n , то имеют место соотношения (4). Соответствующая (6) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $p = (p_1, p_2, \dots, p_N)$ удовлетворяет условию $RP = P$, то будет иметь место соотношение (4). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

В (4) был предложен новый способ построения семейства функций $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$, основанный на применении квадратичных операторов.

Пусть $E = \{1, 2, \dots, N\}$ -конечное множество. Для квадратичного оператора $V: S^{N-1} \rightarrow S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $p_n(l)$ определим следующим образом:

$$p_n(l) = x_l^{(n-1)} \quad (7)$$

для всех натуральных n и $l \in E$. Так как $x^{(n)} \in V^{(n)}(S^{N-1}) \subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V



сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}(S^{N-1}) = S^{N-1}$. Очевидно из (7) следует $\sum_{l=1}^N p_n(l) = 1$, так как $x^{(n-1)} \in S^{N-1}$.

Таким образом, одно из условий (3) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $p_n(l_1, l_2, \dots, l_k)$ при $k > 1$ определим образом

$$p_n(l_0, l_1, \dots, l_k) = x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1, \dots, m_k=1}^N p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \cdot p_{l_2 m_3, l_3} \dots p_{l_{k-1} m_k, l_k} x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_k}^{(n+k-1)} \quad (8)$$

По построению функции (7)- (8) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)} \in S^{N-1}$ на E .

Первое условия (3), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^N p_n(l_0, l_1, \dots, l_k, l) &= x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1, \dots, m_k, m_{k+1}=1}^N p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \cdot p_{l_2 m_3, l_3} \dots p_{l_{k-1} m_k, l_k} p_{l_k m_{k+1}, l} \\ x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_{k+1}}^{(n+k)} &= x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1, \dots, m_k=1}^N p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \dots p_{l_{k-1} m_k, l_k} \\ \cdot x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \dots x_{m_k}^{(n+k-1)} &= p_n(l_0, l_1, \dots, l_k) \end{aligned}$$

$$\text{так как } \sum_{l=1}^N p_{l_k m_{k+1}, l} = 1 \quad \text{и} \quad \sum_{m_{k+1}=1}^N x_{m_{k+1}}^{(n+k)} = 1.$$

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P , определенная функциями (7)- (8), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.



1 .Обсуждение и. результаты

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статье мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стюартом[17]. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и a , т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Aa и aa . Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и.т.д.- всего 27-переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1, P_{AAAa,AA} = 1/2, P_{AaAa,AA} = 1/4, P_{AAaa,AA} = 0, \dots$$

для упрощения записи вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E = \{1, 2, 3\}$. Тогда

$$\begin{aligned} P_{11,1} &= 1 & P_{12,1} &= P_{21,1} = 1/2 & P_{13,1} &= P_{31,1} = 0 \\ P_{11,2} &= 0 & P_{12,2} &= P_{21,2} = 1/2 & P_{13,2} &= P_{31,2} = 1 \\ P_{11,3} &= 0 & P_{12,3} &= P_{21,3} = 1/2 & P_{13,3} &= P_{31,3} = 0 \\ P_{22,1} &= 1/4 & P_{23,1} &= P_{32,1} = 0 & P_{33,1} &= 0 \\ P_{22,2} &= 1/2 & P_{23,2} &= P_{32,2} = 1/2 & P_{33,2} &= 0 \\ P_{22,3} &= 1/4 & P_{23,3} &= P_{32,3} = 1/2 & P_{33,3} &= 1 \end{aligned} \quad (9)$$



Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюръективным []. В этом случае

$$(10) \quad \begin{cases} x_1^{(1)} = (x_1^0 + x_2^0 / 2)^2 \\ x_2^{(1)} = 2(x_1^0 + x_2^0 / 2)(x_3^0 + x_2^0 / 2) \\ x_3^{(1)} = (x_3^0 + x_2^0 / 2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (x_1^1 + x_2^1 / 2)^2 \\ x_2^{(1)} = 2(x_1^1 + x_2^1 / 2)(x_3^1 + x_2^1 / 2) \\ x_3^{(1)} = (x_3^1 + x_2^1 / 2)^2 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

или, подставляя в (3.1.10) выражения (3.1.9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = (x_1^0 + x_2^0 / 2)^2 \\ x_2^{(2)} = 2(x_1^0 + x_2^0 / 2)(x_3^0 + x_2^0 / 2) \\ x_3^{(2)} = (x_3^0 + x_2^0 / 2)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$

$$x^{(k)} = x^{(1)} \quad (11)$$

для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, Aa и aa что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in S^3$ начальное распределение на $E = \{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ -вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.



Теорема 1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)} \in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = l_1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l} = l_1) + \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l} = l_1)}{2^{l-1}}a \quad (12)$$

$$\text{где } a \in M = \left\{ 1/2x_2^{(1)}, (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1) \right.$$

,

$$\left. -x_3^{(1)}, 1/2(x_3 - x_1)^2, 1/2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -(x_1 + 1/2x_2)^2 \right\}.$$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l .

$$\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \dots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, \dots, \xi_{k+l}(\omega) = l_l\}) = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1, \dots, m_l=1}^N P_{l_0 m_1} \cdot P_{l_1 m_2, l_2} \cdot \dots P_{l_{l-1} m_l, l_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} \dots x_{m_l}^{(k+l-1)}, \quad (12^1)$$

$$\text{откуда } P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+l}(\omega) = l_1\}) = x_l^{(k)} \sum_{m=1}^N P_{l_0 m, l_1} x_m^{(k)} \quad (13),$$

При $l=1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$$\begin{aligned} P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = 1, \xi_{k+1}(\omega) = 1\}) &= x_1^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{1m,1} x_m^{(k)} = x_1^{(1)}(x_1^{(1)} + 1/2x_2^{(1)}) = \\ &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)x_2^{(1)} \\ P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = 2, \xi_{k+1}(\omega) = 2\}) &= x_2^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{2m,2} x_m^{(k)} = x_2^{(1)}1/2(x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \\ &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2x_2^{(1)}(x_3 - x_1)^2 = \\ &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)(x_3 - x_1)^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 P_{x^{(0)}}(\{\omega: \xi_k(\omega)=3, \xi_{k+1}(\omega)=3\}) &= x_3^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{3m,3} x_m^{(k)} = x_3^{(1)} (x_3^{(1)} + 1/2 x_2^{(1)}) = \\
 &= P_{x^{(0)}}(\xi_k=3) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3) + 1/2 P_{x^{(0)}}(\xi_k=3) x_2^{(1)} \\
 P_{x^{(0)}}(\{\omega: \xi_k(\omega)=1, \xi_{k+1}(\omega)=2\}) &= x_1^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{1m,2} x_m^{(k)} = x_1^{(1)} (x_3^{(1)} + 1/2 x_2^{(1)}) = \\
 &= x_2^{(1)} x_2^{(1)} + x_1^{(1)} x_3^{(1)} - 1/2 x_1^{(1)} x_2^{(1)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k=1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2) + P_{x^{(0)}}(\xi_k=1) (x_3 + 1/2 x_2) (x_3 - x_1) \\
 P_{x^{(0)}}(\{\omega: \xi_k(\omega)=1, \xi_{k+1}(\omega)=3\}) &= x_1^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{1m,3} x_m^{(k)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k=1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3) - P_{x^{(0)}}(\xi_k=1) (x_3 + 1/2 x_2)^2 \cdot \\
 &\cdot P_{x^{(0)}}(\{\omega: \xi_k(\omega)=2, \xi_{k+1}(\omega)=3\}) = x_2^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{2m,3} x_m^{(k)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k=2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3) + P_{x^{(0)}}(\xi_k=2) \\
 &1/2 (x_3 + 1/2 x_2) (x_1 - x_3)
 \end{aligned}$$

Предположим, что равенство (12) доказано для натурального $l > 1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением (4.A) [4,5] .

$$P_{l_0 l_1, k}^{[S, t+1]} = \sum_{\alpha, \beta=1}^N P_{l_0 l_1, k}^{[S, t]} P_{\alpha \beta, k}^{[t, t+1]} x_{\beta}^{[t]}$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{l_0 m, k}^{[k, k+l+1]} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{l_0 m, \alpha}^{[k, k+l]} P_{\alpha \beta, l_1}^{[k+l, k+l+1]} x_{\beta}^{[k+l]} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 P_{x^{(0)}}(\{\omega: \xi_k(\omega)=l_0, \xi_{k+l+1}(\omega)=l_1\}) &= x_{l_0}^{(k)} \sum_{m=1}^3 P_{1m,3}^{[k, k+l+1]} x_m^{(k)} = x_m^{(k)} = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m=1}^3 \left[\sum_{\alpha, \beta}^3 P_{l_0 m, \alpha}^{[k, k+l]} P_{\alpha \beta, l_1}^{[k+l, k+l+1]} x_{\beta}^{[k+l]} \right] x_m^{(k)} = \\
 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 x_{l_0}^{(k)} \left[\sum_{m=1}^3 P_{l_0 m, \alpha}^{[k, k+l]} x_m^{(k)} \right] P_{\alpha \beta, l_1}^{[k+l, k+l+1]} x_{\beta}^{[k+l]} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=l_0, \xi_{k+l}=\alpha\}) P_{\alpha \beta, l_1}^{[k+l, k+l+1]} x_{\beta}^{(k)}
 \end{aligned}$$

В силу (11)



$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l+1} = l_1) = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 P_{x^{(0)}} = (\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = \alpha\}) P_{\alpha\beta, l_1} x_{\beta}^{(1)} \quad (15)$$

Теперь, как и в случае $l=1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 . Мы ограничимся рассмотрим только одного случая.

Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $l_0 = l_1 = 1$ и $l = 2$.

$$\begin{aligned} P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+2} = 1) &= \sum_{\alpha=1}^3 P_{x^{(0)}} = (\xi_k = 1, \xi_{k+l} = \alpha) \sum_{\beta=1}^3 P_{\alpha\beta, 1} x_{\beta}^{(1)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1) (P_{11,1} x_1^{(1)} + \\ &+ P_{12,1} x_2^{(1)} + P_{13,1} x_3^{(1)}) + P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2) (P_{21,1} x_1^{(1)} + P_{22,1} x_2^{(1)} + P_{23,1} x_3^{(1)}) + \\ &+ P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 3) (P_{31,1} x_1^{(1)} + P_{32,1} x_2^{(1)} + P_{33,1} x_3^{(1)}) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1) (x_1^{(1)} + 1/2 x_2^{(1)}) + \\ &+ P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2) (1/2 x_1^{(1)} + 1/4 x_2^{(1)}) = (x_1^{(1)})^3 + (x_1^{(1)})^2 x_2^{(1)} / 2 + (x_1^{(1)})^2 x_2^{(1)} / 2 + (x_2^{(1)})^2 x_1^{(1)} / 4 + \\ &+ (x_1^{(1)})^2 x_1^{(1)} / 2 + (x_1^{(1)})^2 x_2^{(1)} / 4 + (x_1^{(1)})^2 (x_3 + x_2 / 2) (x_3 - x_1) / 2 + 1/4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} (x_3 + x_2 / 2) (x_3 - x_1) = \\ &P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi = 1) x_2^{(1)} \end{aligned}$$

Теперь предположим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2, \xi_{k+1} = 2) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) (x_3 - x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 3, \xi_{k+1} = 3) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 3) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 3) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) (1/2 x_2 + x_3) (x_3 - x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 3) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) (-(x_2 + 2x_3)^2)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2, \xi_{k+1} = 2) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) (x_3 - x_1)^2$$



$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2, \xi_{k+1} = 3) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 3) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)(1/2x_2 + x_3)(x_1 - x_3)$$

Легко доказывается также, как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что равенства верны для $l+1$.
эти

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 . Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i = j = 1$ в силу (15)

$$\begin{aligned} P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l+1} = 1) &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = 1)(P_{11,1}x_1^{(1)} + P_{12,1}x_2^{(1)} + P_{13,1}x_3^{(1)}) + \\ P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = 2) &= (P_{21,1}x_1^{(1)} + P_{22,1}x_2^{(1)} + P_{23,1}x_3^{(1)}) + P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = 3)(P_{31,1}x_1^{(1)} + \\ + P_{32,1}x_2^{(1)} + P_{33,1}x_3^{(1)}) &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = 1)(x_1^{(1)} + 1/2x_2^{(1)}) + P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = 2)(1/2x_1^{(1)} + \\ 1/4x_2^{(1)}) &= x_1^{(k)}x_1^{(k+l)}(x_1 + 1/2x_2 + 1/2x_2 + x_3) + 1/2^l x_1^{(k)}(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ (2x_1 + x_2 + x_3 - x_1) &= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l+1} = 1) + 1/2^l P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1)x_2^{(1)}/2 \end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Теорема 2. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом начальном $x^{(0)} \in S^2$ и любых натуральных $k, l_1, \dots, l_{n-1}$ и l_n имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n) = \prod_{j=1}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j) + A_n^{l_n} \quad (16)$$

Где

$$\begin{aligned} A_n^{l_n} &= A_{n-1}^{l_{n-1}} [P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n) + a_n / 2^{l_n-1}] + \frac{\prod_{j=1}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j)}{2^{l_n-1}} a_{l_n}, l_0 = 0, A_0^{l_0} = 0, A_0^{l_s} = 1 \\ A_1^{l_s} &= \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_s} = l_s)}{2^{l_s-1}} a_{l_s}, 1 \leq s \leq n, \end{aligned}$$



$$a_{l_n}, a_{l_s}, a_n \in M = \left\{ 1/2x_2^{(1)}, (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), x_3^{(1)}, 1/2(x_3 - x_1)^2, \right. \\ \left. 1/2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -(x_1 + 1/2x_2)^2 \right\}$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по n . При $n=1$ в силу теорема 1 имеем

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2) \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0)}{2^{l_s-1}} \alpha_{l_s},$$

или

$$P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s} = l_s, \xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s+l_{s+1}} = l_{s+1}) = P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s} = l_s) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s+l_{s+1}} = l_{s+1}) + \\ \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_{s+1}} = l_{s+1})}{2^{l_{s+1}-1}} \alpha_{l_{s+1}} = P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s} = l_s) \cdot P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2+\dots+l_s+l_{s+1}} = l_{s+1}) + A_1^{l_{s+1}}$$

Предложим, что равенство (16) доказано для натурального n , и докажем это равенство для $n+1$.

Для этого доказательство теоремы разделим на две части. Рассмотрим сначала случай, когда произведение $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} \neq 0$.

Тогда (12) в силу (14) перепишем в виде



$$\begin{aligned}
 & P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n) = \\
 & = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} P_{l_0 m_1, l_1}^{[k, k+l_1]} P_{l_1 m_2, l_2}^{[k+l_1, k+l_1+l_2]} \dots P_{l_{n-1} m_n, l_n}^{[k+l_1+\dots+l_{n-1}, k+l_1+\dots+l_n]} x_{m_1}^{(k)} x_{m_2}^{(k+l_1)} \dots x_{m_n}^{(k+l_1+\dots+l_n)} = \\
 & = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_n} P_{l_0 m_1, l_1}^{[k, k+l_1]} P_{l_1 m_2, l_2}^{[k+l_1, k+l_1+l_2]} \dots P_{l_{n-1} m_n, l_n}^{[k+l_1+\dots+l_{n-1}, k+l_1+\dots+l_n]} x_{l_0}^{(1)} x_{m_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)} \dots x_{m_n}^{(1)} = \\
 & = \frac{\left[\sum_{m_1}^3 P_{l_0 m_1, l_1}^{[k, k+l_1]} x_{l_0}^{(1)} x_{m_1}^{(1)} \right] \left[\sum_{m_2}^3 P_{l_1 m_2, l_2}^{[k+l_1, k+l_1+l_2]} x_{l_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)} \right] \dots \left[\sum_{m_n}^3 P_{l_{n-1} m_n, l_n}^{[k+l_1+\dots+l_{n-1}, k+l_1+\dots+l_n]} x_{l_{n-1}}^{(1)} x_{m_n}^{(1)} \right]}{x_{l_1}^{(1)} x_{l_2}^{(1)} \dots x_{l_{n-1}}^{(1)}} = \\
 & = \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2) \dots}{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1)} \cdot \\
 & \cdot \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_{n-1}} = l_{n-1}, \xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n)}{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) \dots P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_{n-1}} = l_{n-1})}.
 \end{aligned}$$

Пусть $n = 2$. Тогда

$$\begin{aligned}
 & P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2) = \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2)}{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1)} = \\
 & = \frac{[P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) + A_1^{l_1}]}{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1)} \cdot [P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) + A_1^{l_2}] = \\
 & = [P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) + A_1^{l_1}] [P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) + 1/2^{l_2-1} a_{l_2}] = \\
 & = P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) + A_1^{l_1} [P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) + 1/2^{l_2-1} a_{l_2}] + \\
 & + 1/2^{l_2-1} a_{l_2} \cdot P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1} = l_1) \cdot P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2) + A_1^{l_2}
 \end{aligned}$$

Теперь предположим, что для некоторого n справедливо равенство (16).

Доказывается, что и при $n+1$ равенство имеет место



$$\begin{aligned}
 & P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_{n+1}} = l_{n+1}) = \\
 & = \frac{\prod_{j=0}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j, \xi_{k+l_1+\dots+l_{j+1}} = l_{j+1})}{\prod_{j=0}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j)} = \frac{\prod_{j=0}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j) + A_n^{l_n}}{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n)} \\
 & P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_n} = l_n) = \prod_{j=0}^{n+1} P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j) + A_n^{l_n} [P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_{n+1}} = l_{n+1}) + a_{l_{n+1}} / 2^{l_{n+1}-1}] + \\
 & + \frac{\prod_{j=0}^n P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j)}{2^{l_{n+1}-1}} a_{l_{n+1}} = \prod_{j=0}^{n+1} P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j) + A_{n+1}^{l_{n+1}}
 \end{aligned}$$

Если $x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_3^{(1)} = 0$, тогда мера Менделя является бернуллиевской. Теорема доказана.

Следствие 1. Менделевская мера, построенная выше, является асимптотически бернуллиевской.

Доказательство следует из представлений (12) и (16).

В пространстве Ω произвольный сдвиг T определяется следующим образом: для $\omega \in \Omega$, $\omega' = T\omega$ где $\omega'_n = \omega_{n+1}$.

Определение. Преобразование T обладает свойством перемешивания кратности $r \geq 1$ или, проще, перемешиванием кратности r , если для любых измеримых множеств $A_0, A_1, A_2, \dots, A_r \in F$.

$$\lim_{l_2, \dots, l_r \rightarrow \infty} \mu[A_0 \cap T^{l_1} A_1 \cap \dots \cap T^{(l_1+\dots+l_r)} A_r] = \mu(A_0) \dots \mu(A_r).$$

Следствие 2. Преобразование сдвига T является перемешиванием кратности r .

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 & \{\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \dots, \xi_{k+l_1+\dots+l_r} = l_r\} = \\
 & \prod_{j=1}^r \{\xi_{k+l_1+\dots+l_j} = l_j\} = \prod_{j=0}^r T^{(l_1+\dots+l_j)} \{\xi_k = l_j\} \quad ,
 \end{aligned}$$



В силу (6), (9), (16) и следствия 1 получим

$$\lim_{l_2, \dots, l_r \rightarrow \infty} P \left[\prod_{j=0}^r T^{(l_1 + \dots + l_j)} \{ \xi_k = l_j \} \right] = \prod_{j=0}^r P \{ \xi_k = l_j \}. \text{ Следствие доказано.}$$

Заключение

В статье исследованы квадратичных стохастических соператоров $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$ где S^{n-1} симплекс и V - квадратичный оператор, определенный на S^{n-1} . Рассмотрели отношение Менделевских и Бернуллиевских мер. т.е. Менделевская мера, построенная выше, является асимптотически бернуллиевский.

Литературы

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.
2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.
3. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.
4. Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.
5. Абдирасулов, Х., & Холбеков, Ш. О. (2022). Применение бета и гамма функцией к вычислению некоторых важных в прикладных задачах. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 2(4), 955-963.
6. Колмогоров А.Н., Основные понятия теории вероятностей. М,1936,138 с.
7. Мейлиев, Х. Ж., & Холбеков, Ш. О. (2021). Неподвижные точки квадратичные стохастические операторы на $S^1 * S^1$. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, 1(10), 1152-1155.
8. Umirzakov B.E., Tashatov A.K., Mustafoeva N.M. // On the band-gap width of NiSi_2 nanocrystals created in the surface region of Si using ion implantation // ISSN 1027-4510, *Journal of Surface Investigation: X-ray, Synchrotron and*



Neutron Techniques, 2023, Vol. 17, No. 2, pp. 415–418. © Pleiades Publishing, Ltd., 2023. DOI 10.1134/S1027451023020106

9. Donaev S., Maksumkhanova A., Shafkarov B., Mustafoeva N.. //The dependence of the parameters of energy bands on the depth of the ion-doped layer for Si implanted with ions Ba^{+} // AIP Conference Proceedings this link is disabled, 2022, 2686, 020004. Pp.956-960 <https://doi.org/10.1063/5.0111872>

10. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Эгамбердиева О.Ш. // Изучение зонно структуры на приповерхностных слоев Si, имплантированного ионами бария // ҚарДУ хабарлари. – Қарши, 2022.— №1(51). с.23-28

11. Мустафоева Н.М.. // Состояния скрытых нанокристаллов $NiSi_2$, созданных в приповерхностной области Si// Вестник КГУ им. Бердаха. №7 (57) 2023.с. 38-40

12. Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М.. //Исследование Физические Свойства Нанопленок $NiSi_2/Si$ // Таълим ва ривожланиш таҳлили онлайн илмий журнали, 2022 йил октябр, Vol. 2 No. 10 (2022). с 244-246

13. Ташатов А.К., Мустафоева Н.М., Мустафаева Н. М., Жуманов Ш.А.. //Получение многослойной наносистемы $Si/NiSi_2/Si$, методом твердофазного осаждения// QarDU xabarlarlari Ilmiy-nazariy, uslubiy jurnal , 2024 (1)2 С.10-15

14. Ташатов А.К., Мустафаева Н. М.. // Ширина запрещенной зоны скрытых нанокристаллов $NiSi_2$, созданных в приповерхностной области Si// Mirzo ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston milliy universiteti ilmiy jurnali, Tabiiy fanlar turkumi, 2024. 3/1, С.508-512

15. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Investigation of Physical Properties of Nisi 2/Si Nanofilm// Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP). Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.9-11

16. Tashatov A. K., Mustafoyeva N.M., Mustafaeva N. M., Mavlonova X. J.. //Surface Morphology of $NiSi_2$ /Si Films Produced By Solid-Phase Epitaxy//



- Pioneer: Journal of Advanced Research and Scientific Progress (JARSP)
Germaniya. Volume: 01 Issue: 04 | 2022 ISSN: 2751-7551. pp.5-8
17. Ташатов А. К., Мустафоева Н.М.. //Нанопленок CoSi₂ На Поверхности Si при твердофазном осаждении// Miasto Przyszłości Kielce, Polsha, Vol. 25 (2022): pp.149-151
18. Мустафоева Н.М.. //Анализ состояния скрытых нанокристаллов NiSi₂, созданных в приповерхностной области Si// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.112-116
19. Мустафоева Н.М.. //Морфология и состав поверхности пленок NiSi₂/Si, полученных методом твердофазной эпитаксии// Journal of innovations in social sciences. Volume: 03 Issue:01/ Jan-2023. ISSN: 2181-2594. Pp.117-122
20. Мустафоева Н.М.. //Анализ состояния латентных нанокристаллов NiSi₂, созданных методом ионной имплантации в области кремния// Kielce: Laboratorium Wiedzy Artur Borcuch. International Journal of Economy and Innovation | Gospodarka i Innowacje Volume: 33 | 2023. Economy and Innovation ISSN: 2545-0573. C-275-277