GEOMETRIYA DARSLARIDA KO'PYOQLAR MAVZUSINI TEZAURUSLARYORDAMIDA TUSHUNTIRISH

Allaberganov Baxram Ismailovich
Ajiniyoz nomidagi NDPI,
Seytov Shavkat Jumabayevich
Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti

Ma'lumki, Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoda ixtiyoriy tekislikning tenglamasi

$$T = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d = 0\}$$

ko'rinishda bo'lib, $a, b, c -$koeffitsientlardan kamida biri noldan farqli, ya'ni $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

U holda

$$T(\geq) = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d \geq 0\}$$
$$T(>) = \{(x, y, z) : ax + by + cz + d > 0\}$$

to'plamlar mos ravishda yopiq va ochiq yarim fazolar deyiladi.

Xuddi shunday $T(\leq)$ va $T(<)$ yarim fazolarni aniqlash mumkin. Ravshanki, biz keyinchalik faqat $T(\geq)$ va $T(>)$ yarim fazolarni qarash bilan cheklanishimiz mumkin.

Ta'rif 1. Agar fazodagi analitik M to'plamga tegishli bo'lgan ixtiyoriy A va B nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesma ham M to'plamda yotsa, M to'plam qavariq to'plam deb ataladi.

Agar $A(x_1, y_1, z_1)\ va\ B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalarning koordinatalari chiziqli tenglama yoki tengsizlikning yechimi bo'lsa, AB kesmadagi ixtiyoriy nuqtaning koordinatalari ham shu chiziqli tenglamaning yoki tengsizlikning yechimi bo'ladi. Demak, tekislik hamda yopiq va ochiq yarim fazolar qavariq to'plamdir.

Ixtiyoriy sondagi qavariq to'plamlarning kesishmasi yana qavariq to'plam bo'lishi bevosita ta'rifdan kelib chiqadi. Eslatib o'tamiz, bo'sh to'plam ham qavariq deb hisoblanadi.

Endi T ixtiyoriy tekislik, $T(>)$ va $T(<)$ esa unga mos keluvchi ochiq yarim fazolar bo'lsin. Agar A nuqta $T(>)$ va B nuqta $T(<)$ ga tegishli bo'lsa, M.Pash aksiyomasiga ko'ra AB kesma T tekistlikni yagona nuqtada kesib o'tadi. Ravshanki, fazoda koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsa, M.Pash aksiyomasi matematik analizdagi kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya'ning barcha oraliq qiymatlarini qabul qilishi haqidagi O.Koshi teoremasiga teng kuchli.

Teorema 1. Agar chekli sondagi yopiq yarim fazolar kesishmasi chegaralangan bo'lib, ular mos keluvchi oraliq yarim fazolarning kesishmasi esa bo'sh bo'lmasa, shu yopiq yarim fazolarning kesishmasi qavariq ko'pyoq deyiladi.

Masalan, uchburchakli piramida 4 ta yopiq yarim fazolarning kesishmasi, kub esa 6 ta yopiq yopiq yarim fazolarning kesishmasidan iborat.

To'rttadan kam yopiq yarim fazolarning kesishmasi yoki bo'sh, yoki chegaralanmagan to'plam bo'lishini isbotlash mumkin. To'la matematik indeksiyaga ko'ra 1-ta'rifdagi qavariq ko'yoqni tashkil etuvchi yarim fazolarning soni ichida minimali mavjud va bundaylari yagona. Agar shu minimal sonni p deb belgilasak, qavariq ko'pyoqni p li yoq deb ataymiz.

Qavariq p yoqni tashkil etuvchi yopiq yarim fazolar $T_1(\geq), T_2(\geq), ..., T_n(\geq)$,ularni aniqlovchi tekisliklar esa $T_1, T_2, ..., T_n$ bo'lsin. Ixtiyoriy T_k tekislikning barcha $T_i(\geq),\ (i \neq k)$ yarim fazolar bilan kesishmasi qavariq ko'pyoqning yoqi deb ataladi.

Ravshanki, har bir yoq qavariq ko'pburchak bo'lib, uning tomonlari ko'pyoqning qirralari, uchlari esa ko'pyoqning uchlari deyiladi. Agar qavariq ko'pyoqning uchlari sonini U, qirralari sonini K va yoqlari sonini Y deb belgilasak, Eyler-Dekart formulasiga ko'ra $U - K + Y = 2$ tenglik o'rinli.

Endi

$$T_0 = \left\{ (x, y, z) : a_0 x + b_0 y + c_0 z + d = 0 \right\}, \quad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 \neq 0$$

biror tekistlik bo'lib, u ko'pyoqning hech bir uchidan o'tmasin.

Ushbu

$$f_0(x, y, z) = a_0 x + b_0 y + c_0 z + d$$

chiziqli funksiyaning biror $A(x, y, z)$ nuqtadagi qiymatini $f_0(A)$ deb belgilaylik.

T_0 tekislik ko'pyoqning hech bir uchidan o'tmagani uchun barcha uchlarida f_0 funksiyaning qiymati noldan farqli, ya'ni yoki musbat, yoki manfiy. Agar ko'pyoqning barcha uchlarida f_0 funksiyaning qiymati musbat, yoki manfiy bo'lsa, T_0 tekislik ko'pyoqni kesib o'tmaydi, chunki $T_0(>)$ va $T_0(<)$ yarim fazolar qavariq bo'lgani uchun ko'pyoqning barcha uchlari, demak ko'pyoqning o'zi ham yarim fazolardan birida joylashgan, ya'ni T_0 tekislik bilan kesishmaydi.

Ko'pyoqning biror qirrasi AB bo'lsin. Demak, A va B nuqtalar ko'pyoqning uchlaridir.

Ta'rif 2. Agar ko'pyoqning AB qirrasi uchun $f(a) \cdot f(B) < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, AB qirrani T_0 tekislik uchun maxsus qirra deb ataymiz.

Teorema 2. Ko'pyoqning ixtiyoriy yoqidagi maxsus qirralar soni yoki ikkita, yoki umuman mavjud emas.

Isbot. Pash aksiyomasiga ko'ra, har bir maxsus qirra T_0 tekistlikka tegishli yagona nuqtaga ega. Agar maxsus qirralar soni ikkitadan ko'p bo'lsa, T_0 tekislikda ko'pyoqqa tegishli bo'lgan kamida uchta nuqta mavjud va bu nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotmaydi. Demak, T_0 tekislik ko'pyoqning birorta yoqini o'z ichiga oladi. Ixtiyoriy ko'pyoqning ixtiyoriy yoqi kamida uchta uchni o'z ichiga oladi. U holda T_0 tekislik ko'pyoqning uchlaridan o'tishiga majbur.

Ikkinchidan, har bir yoqdagi maxsus qirralar soni faqat bitta bo'lishi mumkin emas. Chunki, maxsus qirradagi T_0 tekistlikka tegishli nuqta yoq yotgan tekislikka ham tegishli. Ma'lumki, ikki tekislik biror umumiy nuqtaga ega bo'lsa. Bu to'g'ri chiziq ko'pyoqning shu yoq joylashgan qirralaridan birortasini kesib o'tadi, chunki qavariq ko'pburchakning biror tomonini kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq, agar u boshqa uchlaridan o'tmasa, u shu ko'pburchakning boshqa bir tomonini ham kesib o'tadi.

Teorema 3. Ko'pyoqdagi maxsus qirralar soni k ta bo'lsa, ko'pyoq bilan T_0 tekislikning kesimi qavariq k burchak bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan, qavariq ko'pyoqning tekislik bilan kesimi, agar u bo'sh bo'lmasa, qavariq ko'pburchak bo'ladi va har biri maxsus qirraga bu ko'pburchakning faqat bitta uchi joylashgan.

Endi esa barcha xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

Teorema 4. Uchburchakli pramidaning uchlaridan o'tmaydigan ixtiyoriy tekislik bilan kesimi yoki bo'sh to'plam yoki uchburchak, yoki to'rtburchakdan iborat.

Isbot. Ma'lumki, uchburchakli pramidaning ixtiyoriy ikkita uchini tutashtiruvchi kesma piramidaning qirrasi bo'ladi.

Piramidaning uchlari A, B, C, D va T_0 tekislik tenglamasi

$$f_0(x, y, z) = a_0x + b_0y + c_0z + d = 0$$

bo'lsin.

T_0 tekislik piramidaning xech bir uchidan o'tmagani uchun $f_0(A), f_0(B), f_0(C), f_0(D)$ sonlar noldan farqli, ya'ni yoki musbat, yoki manfiy.

Agar bu sonlarning barchasining ishorasi bir xil bo'lsa, piramidaning maxsus qirralari mavjud emas, ya'ni T_0 tekislik piramidani kesib o'tmaydi.

Agar $f_0(A), f_0(B), f_0(C), f_0(D)$ sonlardan uchtasining ishorasi bir xil, to'rtinchisining ishorasi esa qarama-qarshi bo'lsa, piramida uchta maxsus qirraga ega bo'lib, T_0 tekislik bilan piramidaning kesishmasi uchburchakdan iborat bo'ladi.

Nihoyat, $f_0(A), f_0(B), f_0(C), f_0(D)$ sonlardan ikkitasi musbat, qolgan ikkitasi esa manfiy bo'lsa, piramida to'rt maxsus qirraga ega bo'lib, T_0 tekislik bilan kesimi qavariq to'rtburchak bo'ladi.

Kubning tekistlik bilan kesimini topish uchun uni Dekart koordinatalar sistemasiga joylashtiraylik. Kubning qirrasining uzunligi 1 ga teng, uchlaridan biri koordinatalar boshida, shuning uchun chiquvchi uchta qirra esa koordinata o'qlarining musbat yo'nalishida joylashgan bo'lsin.

U holda kubning uchlari , koordinatalari 0 yoki 1 dan iborat bo'lgan barcha nuqtalar.Demak

$(0.0.0),(0.0.1),(0.1.0),(1.0.0),(0.1.1),(1.0.1),(1.1.0)$ *va* $(1.1.1)$ nuqtalar kubning uchlari bo'lib, ularning soni 8 ta.

Uchburchakli pirtamidadan farqi boshqa ko'pyoqlarda ixtiyoriy ikkita uchni tutashtiruvchi kesma shu ko'pyoq uchun qirra bo'lishi shart emas. Ikkinchi tomondan, har bir qirra aniq ikkita yoqqa tegishli.

Ravshanki, biz qarayotgan kub $x \geq 0, \quad x \leq 1, \quad y \geq 0, \quad y \leq 1, \quad z \geq 0, \quad z \leq 1$ yarim fazolarning kesishmasidan iborat va ularning soni minimal. Demak, kubning yoqlari $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$ tekistliklar joylashgan, ya'ni kubning 6 ta yoqi bor.

Ixtiyoriy qirraning uchlari yo'qoridagi 6 ta tekisliklardan ikkitasiga tegishli bo'lishi shart, ya'ni $A(x_1, y_1, z_1)\ va\ B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar qirraning uchlari bo'lishi uchun ularning 2 ta koordinatalari ustma-ust tushishi shart.

Masalan, $(0.0.0)$ va $(1.0.0)$ juftlar kubning qirrasini aniqlaydi, lekin $(0.0.0)$ va $(1.1.0)$ juftlik qirrani tashkil etmaydi.

Faqat bitta koordinatasi bilan farq qiluvchi juftliklar qirrani tashkil etadi va ularning soni 12 ta. Haqiqatan, misol uchun, birinchi koordinatasi bilan farq qiluvchi juftliklar 4 ta, ya'ni 1) (0.0.0) va (1.0.0); 2) (0.0.1) va (1.0.1); 3) (0.1.0) va (1.1.0); 4) (0.1.1) va (1.1.1); Demak, kubning qirralari soni 12 ta.

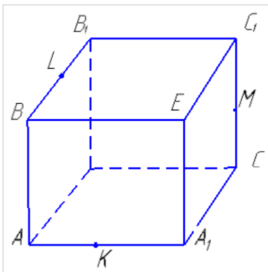
Kubning bitta umumiy koordinataga ega bo'lgan barcha uchlari kubning yoqini tashkil etadi. Masalan, birinchi koordinatasi 0 bo'lgan barcha uchlar to'rtta: (0.0.0); (0.0.1); (0.1.0); (0.1.1). Avval aytilganiga ko'ra kubning yoqlari soni 6 ta.

Umumiy qirraga ega bo'lgan yoqlar qo'shni, umumiy qirraga ega bo'lmagan ikkita yoq parallel(yoki qarama qarshi) yoqlar deyiladi. Umumiy uchga ega bo'lgan qirralarini qo'shni qirralar deyiladi, bir yoqda joylashgan va umumiy uchga ega bo'lmagan qirralar parallel qirralar deyiladi.

Bir yoqda yotmagan ikkita qirraning har biriga parallel bo'lgan uchinchi qirra mavjud bo'lsa, ular ham parallel qirralar deyiladi. Ikkita qirraning ikkalasiga ham parallel bo'lgan uchunchi qirra mavjud bo'lsin, ular ayqash qirralar deb ataladi. Demak, qo'shni va parallel bo'lmagan ikkiat qirra ayqash bo'ladi.

Teorema 5. Kubning uchta ayqash qirralarini kesib o'tuvchi tekistlik bilan kesimi qavariq oltiburchak bo'ladi va aksincha, kubning tekislik bilan kesimi oltiburchak bo'lsa, tekislik kubning qandaydir uchta ayqash qirralarini kesib o'tadi.

Isbot.



1-rasm

Kubning ayqash qirralari $AA_1, BB_1, va\ CC_1$ bo'lsin. Biror tekistlik bu qirralarni K, L va M nuqtalarda kesib o'tsa. Ravshanki, K, L, M nuqtalar bir tekislikda yotmaydi, demak ular orqali o'tuvchi tekislik yagona, ya'ni bir qiymatli aniqlanadi.

Agar koordinatalar boshini A nuqtaga joylashtirib, koordinata o'qlarini mos tanlab olsak, K,L,M nuqtalarning koordinatalari quyidagicha bo'ladi:

$K(a.0.0); L(0.b.1); M(1.1.c),$

Bu yerda $a, b, c -$sonlar (0.1) intervaldagi ixtiyoriy sonlar.

Ma'lumki, $K(a.0.0); L(0.b.1); M(1.1.c),$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi ushbu ko'rinishga ega:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 1 \\ 1-a & 1 & c \end{vmatrix} = 0,$$

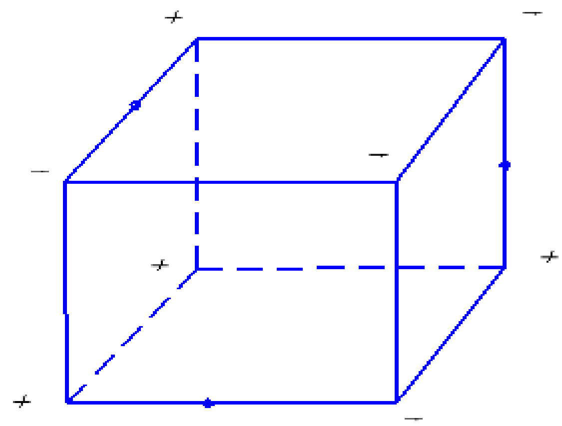
Ya'ni $(bc-1)x+(ac-a+1)y+(ab-a-b)z+a-abc=0.$

Endi $f(x,y,z)=(bc-1)x+(ac-a+1)y+(ab-a-b)z+a-abc$

belgilash kiritib, shu chiziqli funksiyaning kub uchlaridagi qiymatlari ishorasini aniqlaymiz:

1) $f(A)=f(0.0.0)=a-abc=a(1-bc)>0,$ chunki $a,b,c\in(0.1)$
2) $f(A_1)=f(1.0.0)=bc-1+a-abc=bc-1-a(bc-1)=(bc-1)(1-a)<0,$ chunki $bc-1<0$ va $1-a>0.$ (Aslida, $f(A_1)$ ni hisoblash shart emas, chunki M.Pash aksiyomasiga ko'ra tekislik unda yotmagan kesmani ichki nuqtasida kesib o'tsa, kesmaning uchlari tekislik aniqlagan turli ochiq yarim fazolarda joylashgan, ya'ni qaralayotgan holda $f(A)f(A_1)<0$ bo'lishi shart).
3) $$\begin{aligned} &f(c)=f(1.1.0)=bc-1+ac-a+1+a-abc=c(a+b)-abc \\ &=c(a+b-ab)=c(1-(1-a)(1-b))>0 \end{aligned}$$
4) $f(c_1)=f(1.1.1)<0,$ chunki M nuqta tekislikka tegishli va CC_1 qirradan olingan.
5) $f(B)=f(0.0.1)=ab-a-b+a-abc=ab-b-abc=b(a-1-ac)<0$
6) $f(B_1)=f(0.1.1)>0$ chunki L nuqta BB_1 qirradan olingan.
7) $f(D)=f(0.1.0)=ac-a+1+a-abc=ac(1-b)+1>0$
8) $$\begin{aligned} &f(E)=f(1.0.1)=bc-1+ab-a-b+a-abc=b(c+a-ac-1)-1= \\ &=b(1-a)(c-1)-1=-b(1-a)(1-c)-1<0. \end{aligned}$$

Endi kubning uchlarida xosil bo'lgan ishoralarni qo'yib chiqsak



2-rasm

6 ta maxsus qirralar xosil bo'ldi. Demak, kesim qavariq 6 burchakdan iborat. Aksincha, tekislik kubni kesib o'tganda 6 burchak hosil bo'lsa, tekislik kubning barcha 6 ta yog'ini kesib o'tishi majbur, u holda kub qirralaridan qandaydir uchtasi uzaro ayqash qirralarni maxsus tanlab oldik, ammo, qolgan barcha hollarni kubning simmetryaligidan foydalanib, isbotlangan holga qaytarish mumkin.

Kubning bir uchidan chiqqan uchta qirrasidan ixtiyoriy uchta nuqta olib, ular orqali tekistlik o'tkazsak, kesmada uchburchak hosil bo'lishi ravshan.

Izoh. Agar kesimda 6 burchak hosil bo'lsa, uning qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel bo'ladi, chunki ikkita parallel tekistliklarni uchunchi tekislik kesib o'tsa kesishma chiziqlari o'zaro parallel bo'lishi shart.

Teorema 6. Agar kubning kesimi to'rtburchak bo'lsa, u albatta trapetsiya bo'ladi.

Isbot. Kesimda to'rtburchak hosil bo'lishi uchun tekislik kubning 4 ta yoqini kesib o'tishi shart. Kubning 6 ta yoqidan ixtiyoriy 4 tasini tanlab olsak, ular orqali albatta ikkita parallel yoqlar topiladi. Demak, kesimdagi to'rtburchakning qandaydir ikki tomoni o'zaro parallel bo'lishi shart, ya'ni kesim trapetsiyadan iborat.