МЕТОД КВАДРАТУР ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ФРЕДГОЛЬМА II РОДА ИМЕЕТ СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:

Мухторов Беҳруз Қудратулла ўғли

Термез давлат муҳандислик ва агротехнологиялар университети академик лицейи математика фани ўқитувчиси

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b]. \qquad (1)$$

Здесь $y(x)$ неизвестная функция, $K(x,s)$ ядро интегрального уравнения, $f(x)$ свободный член (правая часть) интегрального уравнения. Для удобства анализа в интелральном уравнении (1) по традиции принято выделять числовой параметр λ, который называют параметром интегрального уравнения.

На вопросы существования решения уравнения (1) отвечает классическая теория Фредгольма. Она применима, в частности, для непрерывных в прямоугольнике $[a,b] * [a,b]$ ядер. Будем считать, что правая часть уравнения (1) непрерывна на отрезке $[a,b]$, а его решение будем разыскивать в классе непрерывных на $[a,b]$ функций. Если однородное уравниние $(f(x) \equiv 0)$ имеет только тривиальное решение то значение параметра λ назиается правильным или регульярным. Тогда у неоднородного уравнения при любой правой части $f(x)$ существует единственное решение. Всюду далее в этой главе будем считать это условие выполненным.

Приложения интегральных уравнений Фредгольма второго рода весьма разнообразны граничные задачи теории потенциала, граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, граничные задачи теории упругости и т.д.

2. Описание метода. Найдем приближенное решение уравнения (1) методом квадратур. Построим на отреске $[a, b]$ сетку с узлами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Запишем уравнение (1) в узлах сетки:

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \quad i = 1,2, \dots, n \qquad (2)$$

Аппроксимируем интегралы в равенствах (2) конечными суммами с помощью одной из квадратурных формул:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij}\, y_i = f_i, \quad i = 1,2, \dots, n \qquad (3)$$

Здесь $y_i = \tilde{y}(x_i), f_i = f(x_i), \;\; K_{ij} = K\left(x_i, x_j\right), \tilde{y}$ приближение к искомой функции y, A_j веса квадратурной формулы.

Решение системы уравнений (3) дает приближенные значения искомой функции в узлах x_i. По ним с помощью интерполяции можно построить приближенное решение интегрального уравнения (1) на всем отрезке $[a, b]$.

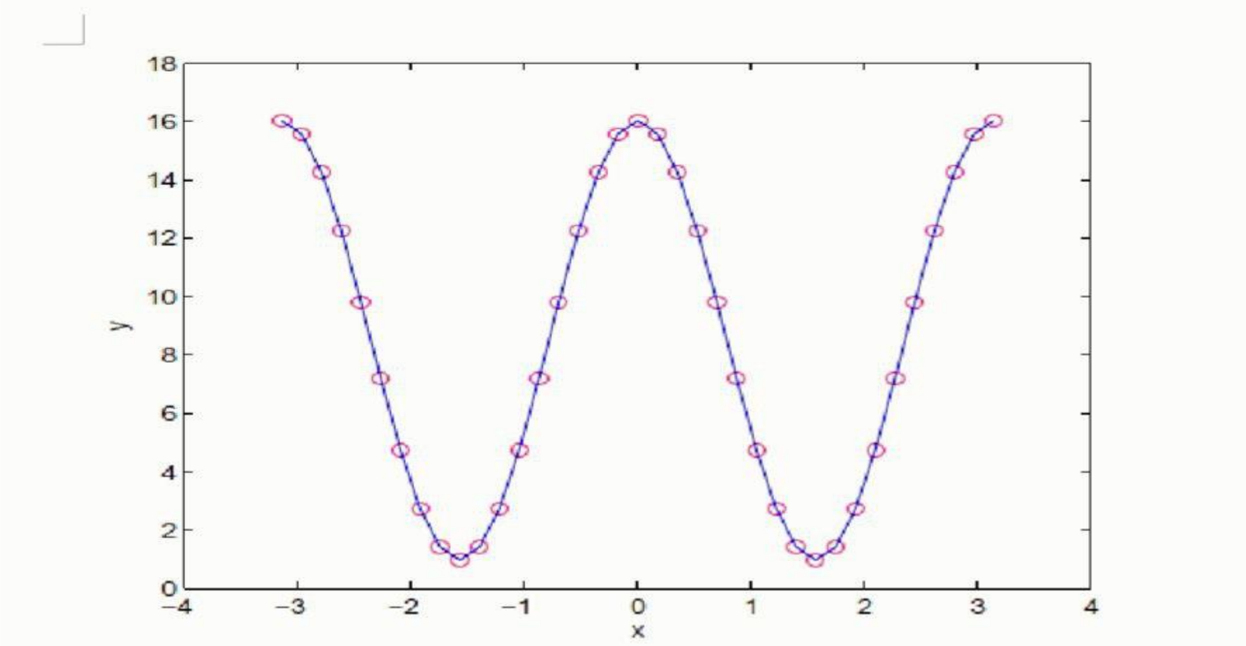
Пусть $\lambda = 1,$ а сетка $x_1, x_2, \dots, x_n$ равномерная с шагом h. Используем квадратурную формулу трапеций. Тогда система линейных алгебраических уравнений (3) примет следующий вид:

$$y_i - h \sum_{j=1}^{n} \omega_j K_{ij}\, y_i = f_i, \quad i = 1,2, \dots, n. \qquad (4)$$

где $\omega_1 = \omega_n = \frac{1}{2}, \omega_j = 1$ при $j = 2,3, \dots, n-1$.

3. Компьютерная программа. Напишем на язике Matlab функцию Fred_II_Rest.m, реализующую вычисления по формуле (4).

```
% Функция для решения уравнения Фредгольма второго
% рода методом квадратур. Используется формула
% трапеций с равноотстоящими узлами.
% входные данные: К- ядро уравнения, f – правая
%  часть ( задаются аналитически ).  a-начало
%  отрезка интегрирования, b- конец отрезка, h-шаг
%  сетки. Результат – вектор  y  приближений к
% решению в излах сетки
% Автор : Файрушин Р.
function  [y] = Fred_II_Rect(К,f,a,b,h)
x=a:h:b;
n=size(x,2);
wt=1/2;
wj=1;
A=zeros(n);
for  i=1:n
        A(i,1)= -h*wt*К(x(i),x(1));
        for j=2:n-1
            A(i,j)= -h*wj*К(x(i),x(j));
        end;
        A(i,n) =-h*wt* К(x(i),x(n));
        A(i,i)=A(i,i)+1;
end;
B=zeros(n,1);
for j=1:n
    B(j,1) = f(x(j));
```



end;

y=A\B;

4.Пример. Выполним с помощью функции Fred_II_rect.m упражнения 3,9, с.162, из книги [3] .Дано уравнение (1) с границами отрезка интегрирования а $= -\pi$ и $b = \pi$, параметром $\lambda = 3/(10\pi)$, ядром

$$K(\mathrm{x}, s) = \frac{1}{0.64cos^2\left(\frac{x+s}{2}\right) - 1}$$

и правой частью $f(x) = 25 - 16sin^2(x)$. Точное решение этого уравнения $y(x) = 17/2 + (128/17)cos(2x)$. Надо найти приближенное решение этого уравнения методом квадратур, основанным на использовании формулы трапеций с равномерной сеткой с шагом $h = \pi/18$, и сравнит с точным.

На языке Matlab сценарий решения этой задачи выглядит следующим образом. Для сравнения приближенного решения с точным используется функция plots.m (см.с.13).

Рис. 1.Резулбтаты решения примера 4, с.24. Непрерывной линией обозначено точное решение, кружочками – прибложенное решение.

```
% Сценарий решение задачи 3.9, с.162, из книги
% Верлань А.Ф, Сизиков В.С.  <<Интегральные уравнения …>>
% Автор: Файрушин Р.
close
all clear
all clc
format long;
h=pi/18;
a=-pi;
b=pi;
lambda = 3/(10*pi);
K= @(x1,s)1/(0.64*(cos((x1+s)/2))^2-1)*lambda;
f=@(x1)25-16*(sin(x1)) ^2;
y_exast=@(x1)17/2+128/17*cos(2*x1);
y_approx=Fred_II_Rest(K,f,a,b,h);
```

Таблиса 1. Результаты решения примера 4, с. 24.

x	точное решение	приближенное решение
0.00000000000000	16.02941176470588	16.02941176470589
0.17453292519943	15.57533267415272	15.57533267415272
1.57079632679490	00.97058823529412	00.97058823529412
2.96705972839036	15.57533267415272	15.57533267415273
3.14159265358979	16.02941176470588	16.02941176470588

```
plots( a,b,h,y_exast,y_approx)
```

Результаты счета представлены в таблице 1 и на рис. 1.

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. Изд-во <<Наука>>, 1975. 632 с.

2. Березин И.С.Жидков Н.П. Методы вычислений. Том 2. М. Государсвенное издательство физико-математической литературы, 1959. 620 с.

3. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Науково думка, 1986. 544 с.

4. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М: Издво <<Наука>>, 1967. 500 с.

5. Манжиров А.В. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. М. Изд-во <<Факториал Пресс>>, 2000. 384 с.