УДК: **377.:517.2(575.1)**

ОБ ОТНОШЕНИЕ БЕРНУЛЛЕВСКИЕ И МЕНДЕЛЕВСКИЕ МЕРЫ.

Х.Ж.Мейлиев(*Iqtisodiyot va pedagogika universiteti)*

Любой сюрьективный квадратичный оператор определенный на симплексе S^3, соответствует некоторому само совмещению $\pi_l, l=\overline{1,24}$.

Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3, сюрьективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Ключевые слова. сюрьективный, квадратичный, оператор, симплекс, гомеоморфизмом. биективен.. само совмещения, тетраэдр, преобразования, группа, вершина, перемещение, выпуклая, линейная, комбинация, композициея.

Введение

В статье исследуются следующие задачи, связанные с изучением сюръективных квадратичных операторов: $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$ где S^{n-1} симплекс и V-квадратичный оператор, определенный на S^{n-1}. На $S^3 = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4): x_l \ge 0,\ \ l=\overline{1,4};\ \sum_{l=1}^{4} x_l = 1\right\}$ произвольный квадратичный оператор V, заданный следующим образом

$$(Vx)_k = \sum_{l,j=1}^{4} P_{lj,k}\, x_l x_j,\ \ k=\overline{1,4} \qquad (1)$$

$$\text{где } P_{l\,j,k} \ge 0,\ P_{l\,j,k} = P_{j\,l,k},\quad \sum_{l,j=1}^{4} P_{l\,j,k} = 1.$$

Пусть (E, m)произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [14] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как это конструкция необходима нам для дальнейшего изложения, приведем её для случая конечного множества E[3].

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\})=P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $\mathrm{P_i}\geq 0$ и $\sum_{l=1}^{N}p_l=1$. Пусть $\Omega=\prod_{l=1}^{\infty}E_l$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $\omega=(\omega_1,\omega_2,...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n - функция, ставящая в соответствие точке $\omega\in\Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n называют n-й координатой функцией. Пусть $F-\sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega:(\xi_n(\omega),\xi_{n+1}(\omega),...,\xi_{n+k-1}(\omega))\in A\}=\{\omega:(\omega_n,\omega_{n+1},...\omega_{n+k-1})\in A\}$$

где A-подмножество прямого произведения $E^k=\prod_{l=1}^{k}E_l$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех "тонких" цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{\omega:\xi_n(\omega)=l_1,\ \xi_{n+1}(\omega)=l_2,...,\xi_{n+k-1}(\omega)=l_k\},$$

где i_j-элемент множества E, $n\leq j\leq n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω, F) однозначно определяется своими значениями

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = P\{\omega : \xi_n(\omega) = l_1, \xi_{n+1}(\omega) = l_2, ..., \xi_{n+k-1}(\omega) = l_k\} \quad (2)$$

на этих цилиндрах, где n-номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k-размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [21], если для множества функций $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} p_n(l_1, l_2, ..., l_k) \geq 0 \\ \sum_{l=1}^{N} p_n(l_1, l_2, ..., l_k, l) = p_n(l_1, l_2, ..., l_k) \\ \sum_{l=1}^{N} p_n(l) = 1 \end{cases} \quad (3)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \leq j \leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$p_n(l_1, l_2, ..., l_k) = \sum_{l=1}^{N} p_n(l, l_1, l_2, ..., l_k) \quad (4)$$

при всех k, n и $l_j \in E, 1 \leq j \leq k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{p_n(l_1, l_2, ..., l_k), \textit{n и k натуральные}\}$, удовлетворяющих условию (3). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $p_n(l_1, l_2, ... l_k)$.

1. **Схема Бернулли**. Пусть $m(\{l\}) = p_l$ - распределения на $E = \{1,2,..., N\}$. Если положить

$$p_n(l_1, l_2,..., l_k) = p_{l_1} p_{l_2} ... p_{l_k} \qquad (5)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2,..., l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (4), (3.1.3). Соответствующая (3.1.4) мера P называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует цепь Бернулли, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi = (p_{lj})_{l,j=1}^{N}$ -стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$p_n(l_1, l_2,..., l_k) = p_{l_1} p_{l_1 l_2} ... p_{l_{k-1} l_k} \qquad (6)$$

т.е. $p_n(l_1, l_2,..., l_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (4). Соответствующая (6) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $p = (p_1, p_2,..., p_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi = P$, то будет иметь место соотношение (4). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

В (4) был предложен новый способ построения семейства функций $p_n(l_1, l_2,..., l_k)$, основанный на применении квадратичных операторов.

Пусть $E = \{1,2,..., N\}$-конечное множество. Для квадратичного оператора $V: S^{N-1} \to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0 = (x_1^0, x_2^0,..., x_n^0) \in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)} = Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $p_n(l)$ определим следующим образом:

$$p_n(l) = x_l^{(n-1)} \qquad (7)$$

для всех натуральных n и $l \in E$. Так как $x^{(n)} \in V^{(n)}\left(S^{N-1}\right) \subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}\left(S^{N-1}\right) = S^{N-1}$. Очевидно из (7) следует $\sum_{l=1}^{N} p_n(l) = 1$, так как $x^{(n-1)} \in S^{N-1}$.

Таким образом, одно из условий (3) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $p_n(l_1, l_2, ..., l_k)$ при $k > 1$ определим образом

$$p_n(l_0, l_1, ..., l_k) = x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \cdot p_{l_2 m_3, l_3} \cdots p_{l_{k-1} m_k, l_k} \; x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_k}^{(n+k-1)}$$

(8)

По построению функции (7)- (8) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)} \in S^{N-1}$ на E.

Первое условия (3), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{l=1}^{N} p_n(l_0, l_1, ..., l_k, l) = x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N} p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \cdot p_{l_2 m_3, l_3} \cdots p_{l_{k-1} m_k, l_k} \; p_{l_k m_{k+1}, l}$$
$$x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_{k+1}}^{(n+k)} = x_{l_0}^{(n)} \sum_{m_1,...,m_k=1}^{N} p_{l_0 m_1, l_1} \cdot p_{l_1 m_2, l_2} \cdots p_{l_{k-1} m_k, l_k}$$
$$\cdot x_{m_1}^{(n)} \cdot x_{m_2}^{(n+1)} \cdots x_{m_k}^{(n+k-1)} = p_n(l_0, l_1, ..., l_k)$$

так как $\sum_{l=1}^{N} p_{l_k m_{k+1}, l} = 1$ и $\sum_{m_{k+1}=1}^{N} x_{m_{k+1}}^{(n+k)} = 1$.

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (7)- (8), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)} \in S^{N-1}$.

1 .Обсуждение и. результаты

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стюартом[17]. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Aa и aa. Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAAa,AA}, P_{AaAa,AA}, P_{AAaa,AA}$ и.т.д.- всего 27-переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA} = 1,\ P_{AAAa,AA} = 1/2, P_{AaAa,AA} = 1/4,\ P_{AAaa,AA} = 0,...$$

для упрощения записи вместо $\{AA, Aa, aa\}$ будем рассматривать множество $E = \{1,2,3\}$. Тогда

$$\begin{array}{lll}
P_{11,1} = 1 & P_{12,1} = P_{21,1} = 1/2 & P_{13,1} = P_{31,1} = 0 \\
P_{11,2} = 0 & P_{12,2} = P_{21,2} = 1/2 & P_{13,2} = P_{31,2} = 1 \\
P_{11,3} = 0 & P_{12,3} = P_{21,3} = 1/2 & P_{13,3} = P_{31,3} = 0 \\
P_{22,1} = 1/4 & P_{23,1} = P_{32,1} = 0 & P_{33,1} = 0 \\
P_{22,2} = 1/2 & P_{23,2} = P_{32,2} = 1/2 & P_{33,2} = 0 \\
P_{22,3} = 1/4 & P_{23,3} = P_{32,3} = 1/2 & P_{33,3} = 1
\end{array} \tag{9}$$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным []. В этом случае

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \\ x_2^{(1)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)\left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right) \\ x_3^{(1)} = \left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \end{cases}$$

(10)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)^2 \\ x_2^{(1)} = 2\left(x_1^1 + x_2^1 / 2\right)\left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right) \\ x_3^{(1)} = \left(x_3^1 + x_2^1 / 2\right)^2 \end{cases} \qquad (3.1.10)$$

или, подставляя в (3.1.10) выражения (3.1.9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \\ x_2^{(2)} = 2\left(x_1^0 + x_2^0 / 2\right)\left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right) \\ x_3^{(2)} = \left(x_3^0 + x_2^0 / 2\right)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right)$

$$x^{(k)} = x^{(1)} \qquad (11)$$

для любого $k > 1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, Aa и aa что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)} = \left(x_1^0, x_2^0, x_3^0\right) \in S^3$ начальное распределение на $E = \{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ -вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)} \in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = l_1) = P_{x^{(0)}}(\xi_k = l_0) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l} = l_1) + \frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l} = l_1)}{2^{l-1}} a \qquad (12)$$

где $a \in M = \{1/2x_2^{(1)}, (x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -1/2(x_3 + 1/2x_2)(x_3 - x_1)$

,

$-x_3^{(1)}, 1/2(x_3 - x_1)^2, 1/2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 - x_1), -(x_1 + 1/2x_2)^2\}.$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$$\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, ..., \xi_{k+l}(\omega) = l_l\}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+1}(\omega) = l_1, ..., \xi_{k+l}(\omega) = l_l\}) = x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1, ..., m_l = 1}^{N} P_{l_0 m_1} \cdot P_{l_1 m_2, l_2} \cdot \qquad (12^1)$$
$$\cdot ... P_{l_{l-1} m_l, l_l} \cdot x_{m_1}^{(k)} \cdot x_{m_2}^{(k+1)} ... x_{m_l}^{(k+l-1)},$$

откуда $P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = l_0, \xi_{k+l}(\omega) = l_1\}) = x_l^{(k)} \sum_{m=1}^{N} P_{l_0 m, l_1} x_m^{(k)}$ (13),

При $l = 1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$$P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = 1, \xi_{k+l}(\omega) = 1\}) = x_1^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{1m,1} x_m^{(k)} = x_1^{(1)}(x_1^{(1)} + 1/2x_2^{(1)}) =$$
$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2x_1^{(1)} x_2^{(1)} = P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 1) + 1/2 P_{x^{(0)}}(\xi_k = 1) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{\omega : \xi_k(\omega) = 2, \xi_{k+l}(\omega) = 2\}) = x_2^{(k)} \sum_{m=1}^{3} P_{2m,2} x_m^{(k)} = x_2^{(1)} 1/2(x_1^{(1)} + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) =$$
$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2x_2^{(1)}(x_3 - x_1)^2 =$$
$$= P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2) P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1} = 2) + 1/2 P_{x^{(0)}}(\xi_k = 2)(x_3 - x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=3,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_3^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{3m,3}x_m^{(k)}=x_3^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=2\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,2}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}\left(x_3^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)=$$
$$=x_2^{(1)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_3^{(1)}-1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=1,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)-P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)^2\cdot$$
$$\cdot P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=2,\xi_{k+1}(\omega)=3\}\right)=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,3}x_m^{(k)}=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)$$
$$1/2(x_3+1/2x_2)(x_1-x_3)$$

Предположим, что равенство (12) доказано для натурального $l>1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением (4.А) [4,5] .

$$P_{l_0l_1,k}^{[S,t+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}P_{l_0l_1,k}^{[S,t]}P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]}x_\beta^{[t]}$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{l_0m,k}^{[k,k+l+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{l_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]} \qquad (14)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\{\omega:\xi_k(\omega)=l_0,\xi_{k+l+1}(\omega)=l_1\}\right)=x_{l_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P^{[k,k+l+1]}_{1m,3\,x_m^{(k)}}=x_m^{(k)}=x_{l_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\left[\sum_{\alpha,\beta}^{3}P_{l_0m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}\right]x_m^{(k)}=$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}x_{l_0}^{(k)}\left[\sum_{m=1}^{3}P_{l_0m,\alpha}^{[k,k+l]}x_m^{(k)}\right]P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}\left(\{\xi_k=l_0,\xi_{k+l}=\alpha\}\right)P_{\alpha\beta,l_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{(k)}$$

В силу (11)

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l+1} = l_1\right) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} P_{x^{(0)}} = \left(\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l} = \alpha\}\right) P_{\alpha\beta,l_1} x_\beta^{(1)} \tag{15}$$

Теперь, как и в случае $l = 1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрим только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $l_0 = l_1 = 1$ и $l = 2$.

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+2} = 1\right) = \sum_{\alpha=1}^{3} P_{x^{(0)}} = \left(\xi_k = 1, \xi_{k+l} = \alpha\right) \sum_{\beta=1}^{3} P_{\alpha\beta,1} x_\beta^{(1)} = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right)\left(P_{11,1} x_1^{(1)} + \right.$$
$$\left. + P_{12,1} x_2^{(1)} + P_{13,1} x_3^{(1)}\right) + P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\left(P_{21,1} x_1^{(1)} + P_{22,1} x_2^{(1)} + P_{23,1} x_3^{(1)}\right) +$$
$$+ P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 3\right)\left(P_{31,1} x_1^{(1)} + P_{32,1} x_2^{(1)} + P_{33,1} x_3^{(1)}\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right)\left(x_1^{(1)} + 1/2 x_2^{(1)}\right) +$$
$$+ P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\left(1/2 x_1^{(1)} + 1/4 x_2^{(1)}\right) = \left(x_1^{(1)}\right)^3 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/2 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/2 + \left(x_2^{(1)}\right)^2 x_1^{(1)}/4 +$$
$$+ \left(x_1^{(1)}\right)^2 x_1^{(1)}/2 + \left(x_2^{(1)}\right)^2 x_2^{(1)}/4 + \left(x_1^{(1)}\right)^2 \left(x_3 + x_2/2\right)\left(x_3 - x_1\right)/2 + 1/4 x_1^{(1)} x_2^{(1)} \left(x_3 + x_2/2\right)\left(x_3 - x_1\right) =$$
$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi = 1\right) x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторого l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 1\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2, \xi_{k+1} = 2\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 2\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2\right)\left(x_3 - x_1\right)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 3, \xi_{k+1} = 3\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 3\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 3\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 3\right) x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 2\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right)\left(1/2 x_2 + x_3\right)\left(x_3 - x_1\right)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 3\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 3\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1\right)\left(-\left(x_2 + 2x_3\right)^2\right)$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2, \xi_{k+1} = 2\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1} = 2\right) + 1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 2\right)\left(x_3 - x_1\right)^2$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2,\xi_{k+1}=3\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+1}=3\right)+1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=2\right)\left(1/2x_2+x_3\right)\left(x_1-x_3\right)$$

Легко доказывается также, как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (15)

$$\begin{aligned}&P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l+1}=1\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1\right)\left(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)}\right)+\\&P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2\right)=\left(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=3\right)\left(P_{31,1}x_1^{(1)}+\right.\\&\left.+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)}\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=1\right)\left(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)}\right)+P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1,\xi_{k+l}=2\right)\left(1/2x_1^{(1)}+\right.\\&\left.1/4x_2^{(1)}\right)=x_1^{(k)}x_1^{(k+l)}\left(x_1+1/2x_2+1/2x_2+x_3\right)+1/2^l x_1^{(k)}\left(x_1+1/2x_2\right)\left(x_3+1/2x_2\right)\\&\left(2x_1+x_2+x_3-x_1\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l+1}=1\right)+1/2^l P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=1\right)x_2^{(1)}/2\end{aligned}$$

что и требовалось показать.

Теорема 2. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом начальном $x^{(0)}\in S^2$ и любых натуральных $k,l_1,...,l_{n-1}$ и l_n имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2,...,\xi_{k+l_1+...+l_n}=l_n\right)=\prod_{j=1}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j}=l_j\right)+A_n^{l_n}\quad(16)$$

Где

$$A_n^{l_n}=A_{n-1}^{l_{n-1}}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_n}=l_n\right)+a_n/2^{l_n-1}\right]+\frac{\prod_{j=1}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_j}=l_j\right)}{2^{l_n-1}}a_{l_n},\ l_0=0,\ A_0^{l_0}=0, A_0^{l_s}=1$$

$$A_1^{l_S}=\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+...+l_S}=l_S\right)}{2^{l_S-1}}a_{l_S},1\le S\le n,$$

$$a_{l_n}, a_{l_S}, \; a_n \in M = \{1/2x_2^{(1)}, (x_3+1/2x_2)(x_3-x_1), -1/2(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1), x_3^{(1)}, 1/2(x_3-x_1)^2, 1/2(x_1+1/2x_2)(x_3-x_1), -(x_1+1/2x_2)^2\}$$

Доказательство теоремы проведем индукцией по *n*. При $n=1$в силу теорема 1 имеем

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = 1, \xi_{k+1} = 2\right)\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0\right)}{2^{l_S-1}}\alpha_{l_S},$$

или

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S} = l_S, \xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S} + l_{S+1} = l_{l_{S+1}}\right) = P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S} = l_S\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S+l_{S+1}} = l_{l_{S+1}}\right) + \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{S+1}} = l_{S+1}\right)}{2^{l_{S+1}-1}}\alpha_{l_{S+1}} = P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S} = l_S\right)\cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2+\ldots+l_S+l_{S+1}} = l_{l_{S+1}}\right) + A_1^{l_{S+1}}$$

Предложим, что равенство (16) доказано для натурального *n*, и докажем это равенство для $n+1$.

Для этого доказательство теоремы разделим на две части. Рассмотрим сначала случай, когда произведение $x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)} \neq 0$.

Тогда (12) в силу (14) перепишем в виде

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, \ldots, \xi_{k+l_1+\ldots+l_n} = l_n\right) =$$

$$= x_{l_0}^{(k)} \sum_{m_1,m_2,\ldots,m_n} P_{l_0m_1,l_1}^{[k,k+l_1]} P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]} \ldots P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots+l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]} x_{m_1}^{(k)} x_{m_2}^{(k+l_1)} \ldots . x_{m_n}^{(k+l_1+\ldots+l_n)} =$$

$$= \sum_{m_1,m_2,\ldots m_n} P_{l_0m_1,l_1}^{[k,k+l]} P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]} \ldots P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]} x_{l_0}^{(1)} x_{m_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)} \ldots . x_{m_n}^{(1)} =$$

$$= \frac{\left[\sum_{m_1}^{3} P_{l_0,m_1,l_1}^{[k,k+l_1]} x_{l_0}^{(1)} x_{m_1}^{(1)}\right]\left[\sum_{m_2}^{3} P_{l_1m_2,l_2}^{[k+l_1,k+l_1+l_2]} x_{l_1}^{(1)} x_{m_2}^{(1)}\right]\ldots}{x_{l_1}^{(1)} x_{l_2}^{(1)}} \cdot \frac{\left[\sum_{m_n}^{3} P_{l_{n-1}m_n,l_n}^{[k+l_1+\ldots+l_{n-1},k+l_1+\ldots+l_n]} x_{l_{n-1}}^{(1)} x_{m_n}^{(1)}\right]}{x_{l_3}^{(1)} \ldots x_{l_{n-1}}^{(1)}} =$$

$$= \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1\right) P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2\right)\ldots}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1} = l_1\right)} \cdot$$

$$\cdot \frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n-1}} = l_{n-1}, \xi_{k+l_1+\ldots l_n} = l_n\right)}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2} = l_2\right)\ldots P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n-1}} = l_{n-1}\right)}.$$

Пусть $n=2$. Тогда

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)=\frac{P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)}=$$

$$=\frac{\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)+A_1^{l_1}\right]}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)}\cdot\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}\right]=$$

$$=\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)+A_1^{l_2}\right]\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+1/2^{2-1}a_{l_2}\right]=$$

$$=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+1/2^{l_2-1}a_{l_2}\right]+$$

$$1/2^{l_2-1}a_{l_2}\cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)=P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0\right)P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1}=l_1\right)\cdot P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+l_2}=l_2\right)+A_1^{l_2}$$

Теперь предположим, что для некоторого n справедливо равенство (16). Доказывается, что и при $n+1$ равенство имеет место

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_k=l_0,\xi_{k+l_1}=l_1,\xi_{k+l_1+l_2}=l_2,\ldots,\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n+1}}=l_{n+1}\right)=$$

$$=\frac{\prod_{j=0}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j,\xi_{k+l_1+\ldots+l_j+1}=l_{j+1}\right)}{\prod_{j=0}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j\right)}=\frac{\prod_{j=0}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j\right)+A_n^{l_n}}{P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_n}=l_n\right)}$$

$$P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_n}=l_n\right)=\prod_{j=0}^{n+1}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j\right)+A_n^{l_n}\left[P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_{n+1}}=l_{n+1}\right)+a_{l_{n+1}}/2^{l_{n+1}-1}\right]+$$

$$+\frac{\prod_{j=0}^{n}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j\right)}{2^{l_{n+1}-1}}a_{l_{n+1}}=\prod_{j=0}^{n+1}P_{x^{(0)}}\left(\xi_{k+l_1+\ldots+l_j}=l_j\right)+A_{n+1}^{l_{n+1}}$$

Если $x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)}=0$, тогда мера Менделя является бернуллиевской. Теорема доказана.

Следствие 1. Менделевская мера, построенная выше, является асимптотически бернуллиевский.

Доказательство следует из представлений (12) и (16).

В пространстве Ω произвольный сдвиг T определяется следующим образом: для $\omega\in\Omega$, $\omega'=T\omega$ где $\omega'_n=\omega_{n+1}$.

Определение. Преобразование T обладает свойством перемешивания кратности $r \geq 1$ или, проще, перемешиванием кратности r, если для любых измеримых множеств $A_0, A_1, A_2, ..., A_r \in F$.

$$\lim_{l_2,...,l_r \to \infty} \mu\left[A_0 \cap T^{l_1} A_1 \cap \dots \cap T^{(l_1+...+l_r)} A_r\right] = \mu(A_1)...\mu(A_r).$$

Следствие 2. Преобразование сдвига T является перемешиванием кратности r.

Доказательство.

$$\left\{\xi_k = l_0, \xi_{k+l_1} = l_1, \xi_{k+l_1+l_2} = l_2, ..., \xi_{k+l_1+...+l_r} = l_r\right\} =$$

$$\prod_{j=1}^{r} \left\{\xi_{k+l_1+...+l_j} = l_j\right\} = \prod_{j=0}^{r} T^{(l_1+...+l_j)} \left\{\xi_k = l_j\right\},$$

В силу (6), (9), (16) и следствия 1 получим

$$\lim_{l_2,...,l_r \to \infty} P\left[\prod_{j=0}^{r} T^{(l_1+...+l_j)} \left\{\xi_k = l_j\right\}\right] = \prod_{j=0}^{r} P\left\{\xi_k = l_j\right\}.$$ Следствие доказано.

Заключение

В статье исследованы квадратичных стохастическых соператоров $V(S^{n-1}) = S^{n-1}$ где S^{n-1} симплекс и V- квадратичный оператор, определенный на S^{n-1}.Рассмотрели отношение Менделевских и Бернуллиевских мер.т.е. Менделевская мера, построенная выше, является асимптотически бернуллиевский.

Литературы

[1]. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.

[2]. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связаной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.

[3]. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.

[4]. Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.

[5]. Абдирасулов, Х., & Холбеков, Ш. О. (2022). ПРИМЕНЕНИЕ БЕТА И ГАММА ФУНКЦИЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(4), 955-963.

[6]. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.

[7]. Мейлиев, Х. Ж., & Холбеков, Ш. О. (2021). НЕПОДВИЖНЫЙ ТОЧКИ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА S1*S1. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(10), 1152-1155.