



НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НА МАЛЫМ РАЗМЕРНОСТИ СИМПЛЕКСЕ

Мейлиев Х. Ж. (Иктисодиёт ва педагогика университети)

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются траектории квадратичные стохастический операторы при менделеевском типе наследования двуполой популяции на одно мерным симплексе.

Ключевые слова: стохастические оператора, пара (x, y) распределений вероятностей, квадратичные стохастические оператор, закона Харди-Вайнберга.

Annotatsiya. Ushbu maqolada bir o'lchovli simpleksda aniqlangan kvadratik stoxastik operatorning mendel tipidagisi ikki jinsning avloddan-avlodga o'tish jarayonida qaralgan.

Tayanch so'zlar: stoxastik operator, juft (x, y) taqsimot ehtimolligi, kvadratik stoxastik operator,

Hardi-Veynberg qonuni.

Annotation. In this paper, we consider trajectories of quadratic stochastic operators under the Mendeleev type of inheritance of a bisexual population on a one-dimensional simplex

Keywords: stochastic operators, (x, y) pair of probability distributions, quadratic stochastic operators, Hardy-Weinberg law.



Введение

Понятие квадратичного стохастического оператора, в первые было дано в работе С.Н.Бернштейна [1], посвященной решению одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама [2], где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекуррентных соотношений при изучении траекторий и необходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Улам и его сотрудники провели вычисления на ЭВМ для достаточно большого числа квадратичных операторов.

Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической биологии и других.

Теория квадратичных стохастических операторов развивалась в течение более 85 лет и было опубликовано много работ.

Квадратичный стохастический оператор (КСО) свободой популяции имеет следующий смысл:

Рассмотрим некоторую биологическую популяцию, т.е. замкнутое относительно размножения сообщество организмов. Предположим, что каждая особь, входящая в популяцию, принадлежит некоторой единственной из n разновидностей $1, 2, 3, \dots, n$. Шкала разновидностей (признаков,



фенотипов, генотипов) должна быть такой, чтобы разновидности родителей i и j однозначно определяли вероятность каждой разновидности k для непосредственного потомка первого поколения. Обозначим эту вероятность («Коэффициент наследованности») через $P_{ij k}$. Очевидно что в этом случае выполнены условия:

$$\sum_{k=1}^n P_{ij k} = 1, \text{ для всех } i, j, k$$

Предположим, что популяция настолько велика, что можно пренебречь флуктуациями частот. Тогда ее состояния можно описывать набором $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$ вероятностей разновидностей. т.е. x_i есть доля разновидности i в популяции.

При так называемой панмиксии или случайном скрещивании при фиксированном состоянии $x = (x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$ родительские пары i и j образуются с вероятностью $x_i x_j$ и, следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^n x_i x_j P_{ij k} = x_k' \quad (1)$$

будет полной вероятностью k среди непосредственных потомков. Множество

$$S_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \geq 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \quad (2)$$

называется $n-1$ -мерным симплексом и, так как $\sum_{k=1}^n x_k' = 1$ и $x_k' \geq 0$, то отображение (2)


 $k \leq 1$

$S_n \leq 1$ в себя. где называется квадратичным стохастическим оператором, переводит симплекс $P_{ij,k}$, $-$ коэффициент наследованности удовлетворяют условия:

 n

$$P_{ij,k} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^n P_{ij,k} = 1, \quad i, j, k. \quad (3)$$

 $k \leq 1$

Среди математических моделей генетики важную роль играют модели, порожденные квадратичными операторами.

Траектория для $x(0) \in S_{n-1}$ под действием КСО (2) определяется следующим образом:

$$x(n+1) = V(x(n)), n = 0, 1, 2, \dots$$

Одна из основных задач для данного оператора в математической биологии состоит в изучении асимптотического поведения траекторий. Это проблема была полностью решена для вольтеровских КСО которые определяются равенствами (1), (3) и дополнительным предположением

$$P_{ij,k} = 0, \quad \text{если } k \notin \{i, j\} \quad (4)$$

В настоящей работе мы рассматриваем квадратичные стохастический операторы двуполой популяции на одно мерном симплексе.

Определения. Пусть $F = \{F_1, F_2, F_3 \dots, F_n\}$ – множество женского типа, $M = \{M_1, M_2, M_3 \dots, M_v\}$ – множество мужских типа. Состоянием популяции называется пара распределений вероятностей

на множествах соответственно F и M .



(3)

Пространством состояний данной популяции является декартово произведение $(n-1)$ мерного симплекса на $(v-1)$ мерной симплекс .

Дифференциация популяции называется наследственной, если при любом состоянии (x, y) в поколении G однозначно определено состояние (x', y') , возникающее в следующем поколении G' путем скрещиваний и отбора.

Отображение отображающие $(n-1) * (v-1)$ мерной

декартово произведение на себя определяемое равенством

(6)

называется эволюционным оператором. В координатах оно превращается в систему

равенств

,

(7)

которые также называется эволюционными. Отображение (7) при любом начальном состоянии однозначно определяет траекторию

Множество предельных точек траектории, начинающейся в точке , называется ее предельным множеством и обозначается через .

Выведем эволюционные уравнения двуполой популяции. Исходными данными для этого являются коэффициенты наследственности . Величина



определяется как вероятность рождения потомка женского типа у матери типа

, и отца типа Аналогично определяется очевидно,

(9)

коэффициенты наследственности суммарно учитывает, например, такие факторы, как рекомбинационный процесс, отбор гамет, мутации, дифференциальная рождаемость.

Пусть G -состояние в поколении G . (x', y') - возникающее в следующем поколении G' в момент его содержания вероятности типов находятся по формуле полной вероятности:

(10)

Квадратичный стохастический оператор называется менделеевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют законам Менделя [8], т.е. траектории квадратичный стохастический операторы стабилизуется со второго шага.

Пусть $n=v=2$. Приведём некоторые модели, описываемые квадратичными стохастическими операторами.

1.В модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стьюартом в 1971 году [8], передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи:

-от женского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A, -от

женского типа родителя с генотипом aA ребёнку передаётся аллель A, -от женского типа родителя с генотипом Aa ребёнку передаётся аллель -от



женского типа родителя с генотипом AA ребёнку передаётся аллель A и тогда

.

Пусть p , q и частоты генотипов AA, Aa, aA и aa соответственно. Тогда квадратичный стохастический оператор определяет, как изменяются частоты генотипов от поколения к поколению по формуле (10):

Обозначим для краткости генотипы AA, Aa, aA и aa через 11, 12, 21, и 22 соответственно.

Или по ушиванию

(12)

В соответствии с гипотезой о менделеевском типе наследования вероятности определены следующим образом:

Подставляя величины (13) в (12), получим

Или отсюда, т.к. окончательно имеем

(14)

Т.е. частоты генотипов неизменяются от поколения к поколению, что составляет первое утверждение в законе Харди-Вайнберга.

Теорема 1. Закон Харди-Вайнберга не изменяются от поколения к поколению справедлив только при менделеевском типе наследования.

Доказательство. Введём следующие обозначения:



, , тогда Харди-Вайнберга

записывается следующим образом:

Или

Решив эту системы, получим $a=1, b=1, c=0, d=0, a_1=1, b_1=0, c_1=1, d_1=0$, откуда и следует утверждение теорема.

2. При менделеевском типе наследования квадратичный стохастической операторы определяется следующим образом:

Частоты генотипов от поколения к поколению изменяются найдипо формуле (12).

Подставляя в (12) выше указанные вероятности, получим

Или окончательно

Чтобы определить частоты генотипов в следующем поколении, в (16) необходимо подставить т.т. в место и соответственно, т. е. получим уравнения

Или, подставляя в (17) выражения (16), окончательно имеем

откуда следует, что частоты генотипов во всех последующих поколениях будут такими же, как в первом поколении. Сформулируем это свойство в виде следующего теорема.

Теорема 2. Устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение. Это теорема есть третье утверждение закона Харди-Вайнберга, правда, чуть в общем виде.

Из (16) видно что прообраз $((1;0),(0;1))$ и $((0;1),(1;0))$ пуст, откуда следует, что оператор не является сюръективным отображением.



Литературы

1. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. квфедр. Украины, отд.матем.,1924,вып.Іс 83-115.,
2. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.
3. Ганиходжаев Р.Н. Карта неподвижных точек функции Ляпунова для одного класса дискретных динамических систем//Мат. Заметки.-1994.-56.-С.1125-1131.
4. Ганиходжаев Н.Н.,Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных операторов.//ДАН РУз, 1997.
5. LyubichYa.I. Mathematical structures in populationgenettes//Biomathematics -1992. 22//.
6. У.А.Розиков, У.У. Жамилов. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции.//Укр.мат.жур.,2001.м 63.№7//
7. Розиков У.А.Жамилов У.У.О динамике строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе.//Мат.сб.-2009.-200,№9.-с.81-94.
8. Генетика и наследственность.//Сб.статей. М.,1987.300 с.