



МЕТОД СЛАБОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БЮРГЕРСА

Турдиев Улугбек Каюмович

*Доцент кафедры математики
Университета информационных
технологий и менеджмента в.б.
г. Кариш, Узбекистан*

Аннотация. Методом слабой аппроксимации доказано существование и единственность решения задачи Коши для одномерной системы типа Бюргерса.

Ключевые слова: Система типа Бюргерса, метод слабой аппроксимации.

1. Метод слабой аппроксимации. Теорема сходимости метода слабой аппроксимации

Для полноты изложения приведем краткое описание метода слабой аппроксимации и одну теорему сходимости метода. Более подробно эта информация изложена в [4, 5]

В банаховом пространстве H рассмотрим задачу Коши

$$\frac{du}{dt} + L(t)u = f(t), t \in [0, T], u|_{t=0} = u_0, \quad (1.0)$$

где $L(t)$ - нелинейный, вообще говоря, неограниченный оператор с переменной областью определения $D(L(t))$, причем при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ оператор $L(t)$ отображает $D(L(t))$ в H .

Пусть $L = \sum_{i=1}^m L_i$, $f = \sum_{i=1}^m f_i = \bigcap_{i=1}^m D(L_i(t)) \subseteq D(L(t))$.

Считаем, что операторы $L_i(t)$ отображают $D(L_i(t))$ в H функции



$$f_i(t) \in H, i = 1, \dots, m.$$

Наряду с задачей (1.0) рассмотрим семейство задач, зависящих от параметра τ :

$$\frac{du^\tau}{dt} + L\tau(t)u^\tau = f\tau(t), \quad t \in [0, T], u^\tau|_{t=0} = u_0 \quad (1,1)$$

Где

$$L_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(\tau, t) L_i(t), \quad f_\tau(t) = \sum_{i=1}^m \beta_i(\tau, t) f_i(t),$$

а функции $\alpha_i(\tau, t), \beta_i(\tau, t)$ слабо аппроксимируют единицу, т.е. для любых $t_1, t_2 \in [0, T]$ при $\tau \rightarrow 0$

$$\int_{t_1}^{t_2} (\alpha_i(\tau, t) - 1) dt \rightarrow 0, \quad \int_{t_1}^{t_2} (\beta_i(\tau, t) - 1) dt \rightarrow 0$$

Метод решения задачи (1.0), при котором в качестве приближенных решений $u^\tau, \tau > 0$, берутся решения задачи (1.1) и решение u задачи (1.0) находится как предел при $\tau \rightarrow 0$, решений $u^\tau (u = \lim_{\tau \rightarrow 0} u^\tau)$, называется методом слабой аппроксимации ([4], [5], [6]).

Если функции $\alpha_i(\tau, t), \beta_i(\tau, t)$ выбрать в виде $n = 0, 1, \dots, N - 1$, то в этом случае нахождение решения u^τ задачи (1.1) сводится к решению последовательности задач Коши:

$$u^\tau|_{t=0} = u_0$$

В качестве начальных данных на этом шаге берется значение решения, полученного на первом дробном шаге в момент $t = \frac{\tau}{m}$. Продолжая аналогичным образом, определяют решение на множествах $\left(\left(\frac{2\tau}{m}, \frac{3\tau}{m}\right], \dots, \left(\frac{(m-1)\tau}{m}, \tau\right]\right)$ Тем самым находят решение на отрезке $[0, \tau]$ - нулевом целом шаге. После этого аналогично находят решение на отрезке $[\tau, 2\tau]$ - первом целом шаге, затем - на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ и так далее. Через конечное число шагов (число это равно N) решение u^τ находят на отрезке $[0, T]$. Задачу (1.1) называют расщеплением задачи (1.0).



Рассмотрим в полосе $\tilde{\Gamma}_{[0,T]} = \{(t, x) | 0 < t < T, x \in R^n\}$ систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi(t, x, \bar{u}), \quad (1.2)$$

где $u = u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_l(t, x))$, $\varphi(\varphi_1, \dots, \varphi_l)$ - вектор-функции размерности l ($l \geq 0$).

$$\bar{u} = \left(u_1, \dots, u_l, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^r u_1}{\partial x_1^r}, \dots, \frac{\partial^r u_n}{\partial x_n^r} \right).$$

Пусть $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi^i$, $\varphi_j = \sum_{i=1}^m \varphi_j^i$, $j = 1, \dots, l$, где φ^i - вектор-функции размерности l ; φ^i, φ_j^i - j -е компоненты векторов φ и φ^i соответственно.

Система

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} = \sum_{i=1}^m a_{i,\tau}(t) \varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau), \quad (1.3)$$

где

$n = 0, 1, \dots, N-1$; $\tau N = T$ слабо аппроксимирует систему (4). $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$ - некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$ зависящие от τ .

Наконец, рассмотрим систему

$$\frac{\partial u^\tau}{\partial t} \sum_{i=1}^m a_{i,\tau}(t) \varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau) \quad (1.4)$$

где вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau)$ есть некоторые аппроксимации вектор-функций $\varphi_i(t, x, \bar{u}^\tau)$ зависящие от τ .

Ниже будем рассматривать классические решения уравнений (1.2), (1.3), (1.4). Под классическими решениями уравнений (1.3) ((1.4)) мы понимаем функцию u^τ непрерывную вместе со всеми своими производными по пространственным переменным, которые входят в уравнение (1.3), в полосе $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}$, обладающую кусочно-непрерывной производной u_t^τ . В $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}$, (u_t^τ) может иметь разрывы лишь на гиперплоскостях



$t = \left(n + \frac{i}{m}\right)\tau, n = 0, 1, \dots, N-1, \tau N = T, i = 0, 1, \dots, m-1$ и удовлетворяющую уравнению (1.3) ((1.4)).

Предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 1. Вектор-функции φ_i определены и непрерывны при любых значениях своих аргументов. Вектор-функции $\varphi_{i,\tau}(t, x, \bar{u}^\tau$ на классических решениях $\bar{u}^\tau$ системы уравнений (1.4) непрерывны по переменным $(t, x) \in \tilde{\Gamma}_{[0,T]}$

Пусть $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty (0 < \tau \leq \tau_0)$ - некоторая последовательность, сходящаяся к нулю: $\lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = 0$. Заметим, что последовательности $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ соответствует последовательность $\{N_k\}_{k=1}^\infty = 1$ целых чисел, таких, что $\tau_k N_k = T$. Через $u^{\tau_k}(t, x)$ обозначим решение системы (1.4) при фиксированном $\tau_k > 0$.

Условие 2. Пусть при всех $\tau_k > 0$ классическое решение u_k^τ системы (1.4) существует и при $\tau_k \rightarrow 0$ равномерно в $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}^N = \{(t, x) | 0 < t < T, |x| \leq N\}$ последовательность u_k^τ сходится к некоторой вектор-функции u вместе со всеми производными по x , входящим в (1.2), причем

$$\max_{\tilde{\Gamma}_{[0,T]}^N} |\varphi_i(t, x, \bar{u}^{\tau_k}) - \varphi_{i,\tau_k}(t, x, \bar{u}^{\tau_k})| \rightarrow 0, \quad \tau_k \rightarrow 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Теорема. Пусть выполняются условия 1, 2. Тогда вектор-функция $u(t, x)$ есть решение системы (1.2) в $\tilde{\Gamma}_{[0,T]}^N$.

Доказательство теоремы 1.3 приведено в [4].

2. Метод слабой аппроксимации для задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса

Рассмотрим относительно данных Коши $u_0, \tilde{u}_0$ задачи

$$u_t + uu_x = vu_{xx} - \tilde{b}(u - \tilde{u}),$$

$$\tilde{u}_t + \tilde{u}\tilde{u}_x = \tilde{v}\tilde{u}_{xx} - \tilde{b}(u - \tilde{u}),$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{u}_0(x), \quad x \in R.$$

предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^2(R)$ и



$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n \quad x \in R, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.0)$$

где $c_n, \tilde{c}_n$ - некоторые заданные неотрицательные постоянные.

В начале рассмотрим случай бесконечно дифференцируемых данных Коши. Предположим, что $u_0, \tilde{u}_0 \in C^\infty(R)$ и

$$\left| \frac{d^n u_0(x)}{dx^n} \right| \leq c_n, \quad \left| \frac{d^n \tilde{u}_0(x)}{dx^n} \right| \leq \tilde{c}_n \quad x \in R, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.1)$$

Следуя [2, 7], слабо аппроксимируем задачу Коши (1)-(3) задачей

$$u_t^\tau = 3v u_{xx}^\tau, \quad \tilde{u}_t^\tau = 3\tilde{v} \tilde{u}_{xx}^\tau, \quad n\tau < t \leq \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau, \quad (2.2)$$

$$u_t^\tau + 3u^\tau u_x^\tau = 0, \quad \tilde{u}_t^\tau + 3\tilde{u}^\tau \tilde{u}_x^\tau = 0, \quad \left(n + \frac{1}{3}\right)\tau < t \leq \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau, \quad (2.3)$$

$$u_t^\tau = -3\tilde{b}(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \quad \tilde{u}_t^\tau = 3b(u^\tau - \tilde{u}^\tau), \quad \left(n + \frac{2}{3}\right)\tau < t \leq (n+1)\tau, \quad (2.4)$$

$$u^\tau(0, x) = u_0(x), \quad \tilde{u}^\tau(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad (2.5)$$

где $N_\tau = t^*, N > 1$ - целое, $n = 0, 1, \dots, N-1$, и постоянная t^* удовлетворяет неравенству (30) (см. ниже).

Замечание При построении решения задачи (2.2)-(2.5) на первых дробных шагах решается задача Коши для уравнения теплопроводности, а на вторых дробных шагах - задача Коши для уравнения переноса

$$v_t + 3v v_x = 0, \quad (2.6)$$

а на третьих дробных шагах - задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решения которого имеет вид

$$u_t^\tau = u_0(x) + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} (\tilde{u}_0(x) - u_0(x))(1 - e^{-\bar{b}t}),$$

$$\tilde{u}^\tau = \tilde{u}_0(x)e^{-\bar{b}t} + \frac{3\tilde{b}}{\bar{b}} \tilde{u}_0(x)(1 - e^{-\bar{b}t}) + \frac{3b}{\bar{b}} u_0(x)(1 - e^{-\bar{b}t})$$

где $\bar{b} = 3(b + \tilde{b})$.



Известно, что в случае задачи Коши для уравнения (2.6) с начальными данными

$$v(0, x) = v_0(x) \quad (2.7)$$

ограниченными вместе со своими производными, может иметь место градиентная катастрофа то есть может существовать $t_l > 0$, такое, что классическое решение v этой задачи существует в полосе $\Gamma_{[0, t_l]}$, само остается в этой полосе ограниченным, но производная v_x в окрестности некоторой точки (t_l, x^0) становится неограниченной: $v_x(t, x) \rightarrow \infty$, при $t \rightarrow t_l, x \rightarrow x^0$ [1, 3, 4].

Нетрудно показать, что если

$$\left| \frac{dv_0(x)}{dx} \right| \leq c_1 \quad (2.8)$$

то классическое решение задачи (2.6), (2.7) существует в полосе $\Gamma_{[0, t^*]}$, ограничено и

$$|v_x(t, x)| \leq \frac{c_1}{1 - c_l t}, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0, t^*]}, \quad (2.9)$$

где t удовлетворяет неравенству

$$1 - 3c_l t^* > 0$$

Пусть выполнены соотношения (2.1) и постоянные c, a и t^* удовлетворяют условиям

$$1 - c_l t^* > 0, \quad 1 - \tilde{c}_l t^* > 0 \quad (3.0)$$

тогда решение u^τ и $\tilde{u}^\tau$ в полосе $\Gamma_{[0, t^*]}$, существует и ограничено вместе со всеми своими производными по переменным t, x .

Очевидно, что при любом фиксированном τ решение u^τ и $\tilde{u}^\tau$ задачи (2.2)-(2.5) ограничены независимо от величины τ :

$$|u^\tau(t, x)| \leq c_0, \quad |\tilde{u}^\tau(t, x)| \leq \tilde{c}_0 \quad (3.1)$$



Повторяя рассуждение из [9], можно показать ограниченность частных производных решений u^τ и $\tilde{u}^\tau$ по x любого порядка равномерно по τ :

$$\left| \frac{\partial^k u^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k \tilde{u}^\tau(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0, t^*]}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

- где $C^k, \tilde{C}^k$ — некоторые положительные постоянные, такие что $C_0 = c_0, \tilde{C}_0 = \tilde{c}_0$

Из неравенств (3.1), (3.2) и уравнений (2.2)-(2.4) следуют равномерные по τ оценки:

$$\left| \frac{\partial^{k+1} u^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^{k+1} \tilde{u}^\tau(t, x)}{\partial t \partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0, t^*]}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

Из этих оценок следует, что $u^\tau, \tilde{u}^\tau$ и их производные по x любого порядка равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $\Gamma_{[0, t^*]}$. На основании теоремы Арцела диагональным способом можно выбрать под последовательность $\{u^{\tau_k}\}, \{\tilde{u}^{\tau_k}\}$ последовательностей $\{u^\tau\}, \{\tilde{u}^\tau\}$, сходящуюся в $\Gamma_{[0, t^*]}$ к функциям u и $\tilde{u}$ соответственно вместе со всеми производными по x , равномерно в каждой ограниченной области полосы $\Gamma_{[0, t^*]}$, вследствие чего функции u и $\tilde{u}$ имеют производные любого порядка по x и выполняются соотношения

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \tilde{u}(0, x) = \tilde{u}_0(x), \quad (3.4)$$

$$\left| \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq C_k, \quad \left| \frac{\partial^k \tilde{u}(t, x)}{\partial x^k} \right| \leq \tilde{C}_k, \quad (t, x) \in \Gamma_{[0, t]}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.5)$$

Единственность решения доказывается стандартным способом. Следовательно, и сами последовательности функций $\{u^\tau\}, \{\tilde{u}^\tau\}$ при $t \rightarrow 0$ сходятся равномерно в $\Gamma_{[0, t]}$ к u и $\tilde{u}$ соответственно, вместе со всеми производными. Случай, когда $u_0, \tilde{u}_0 \in C^2(R)$ доказывается с помощью средних функций [8,12-21].



Список литературы:

1. Куликовский А.Г., Свешников Е.И., Чугайнова А.П. Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений, Москва -2010, 122с.
2. Белов Ю.Я., Демидов Г.В. Решение задачи Коши для системы уравнений типа Хопфа методом слабой аппроксимации // Численные методы механики сплошной среды. - Новосибирск: ВЦ СО АН Россия, 1970. - Т.1, N0.2. - с. 3-16.
3. Турдиев У. К. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ДВУХСКОРОСТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ //Теория и практика современной науки. – 2024. – №. 12 (114). – С. 239-247.
4. Имомназаров Х., Турдиев У. К. Исследование задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса методом слабой аппроксимации //Проблемы информатики. – 2019. – №. 3 (44). – С. 20-30.
5. Turdiev, U. K. "Imomnazarov Kh. Kh. A system of equations of the Riemann type arising in a two-fluid medium." Int. Conf. "Inverse and ill-posed problems. 2019.
6. Имомназаров Х. Х., Турдиев У. К. Об одной системе уравнений типа Бюргерса, возникающей в двухжидкостной среде //Интерэкспо Гео-Сибирь. – 2018. – Т. 2. – №. 4. – С. 95-103.
7. Имомназаров Б. Х., Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. Задача Коши для одномерной системы типа Бюргерса //Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. – 2019. – С. 30-30.
8. Имомназаров, Х. Х., and У. К. Турдиев. "ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ПОРОУПРУГОСТИ." МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН



НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА имени МИРЗО
УЛУГБЕКА 204 (2012): 48.

9. Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА ХОПФА //КАРШИ
ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ. – 1989. – №. 9. – С. 187.

10. Турдиев У. К., Имомназаров Х. Х. НЕКОТОРЫЕ
ИНТЕРЕСНЫЕ КЛАССЫ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВОЗНИКАЮЩИХ В
ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ //КАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ. – С. 184.

11. Турдиев У. К. Система уравнений типа Римана, возникающая в
двухжидкостной среде: Система уравнений типа Римана, возникающая в
двухжидкостной среде //MODERN PROBLEMS AND PROSPECTS OF
APPLIED MATHEMATICS. – 2024. – Т. 1. – №. 01.

12. Normamatovich R. B. R., Yo‘Ldosheva O. N. M., Qizi T. R. R.
RAQAMLASHGAN MUHITDA BO ‘LAJAK MATEMATIKA O
‘QITUVCHILARINING AXBOROT KOMPETENSIYASINI
RIVOJLANTIRISHNING MOHIYATI //Eurasian Journal of Mathematical
Theory and Computer Sciences. – 2024. – Т. 4. – №. 2. – С. 7-11.

13. Komolov H. M. RAQAMLI MUHITDA BO ‘LAJAK
BOSHLANG‘ICH SINF O ‘QITUVCHILARINING KASBIY
TAYYORGARLIGINI RIVOJLANTIRISHDA MUSTAQIL TA’LIMNING O
‘RNI //Теория и практика современной науки. – 2024. – №. 12 (114). – С. 9-13.

14. Raxmonov, B. (2022). FANLARARO ALOQADORLIKDA
TALABALARNING AXBOROT KOMPETENSIYASINI
RIVOJLANTIRISHDA IT-TEXNOLOGIYALARINING IMKONIYATLARI.
Science and innovation, 1(B8), 509-514.

15. Rakhmonov, B. (2022). TALABALARNING AKT
KOMPETENSIYASINI SHAKILLANTIRISHDA FANLARARO



ALOQADORLIKNI HISOBGA OLIB MUSTAQIL TA'LIMNI TASHKIL ETISH MODEL. Science and innovation, 1(B5), 285-288.

16. Uralovich, B. D., Normamatovich, R. B., & Kholmatovich, K. J. (2021). Development Of Mathematics In Different Periods. European Journal of Research Development and Sustainability, 2(3), 53-54.

17. Uralovich, B. D., Normamatovich, R. B., & O'Gli, A. Z. A. (2021). Sonlardan ildiz chiqarish haqida. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(4), 1428-1432.

18. Qayumova G. A. MATEMATIKA FANINI O 'QITISHDA TALABALARNING MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENTSIYANI RIVOJLANTIRISH //Экономика и социум. – 2024. – №. 11-2 (126). – С. 343-348.

19. Qayumova G. RAQAMLI MUHITDA TA'LIM SIFATINI OSHIRUVCHI OMILLAR //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B5. – С. 289-292.

20. Qayumova G. RAQAMLASHTIRILGAN MUHITDA MUSTAQIL ISHLASH KOMPETENSIYASINI RIVOJLANTIRISHDA AXBOROT TEXNOLOGIYALARNING O'RNI //Science and innovation. – 2022. – Т. 1. – №. B8. – С. 505-508.