КРАЙНИЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА S^3.

Мейлиев Х.Ж.*(Иктисодтёт ва Педагогика Университети)*

Аннотация; Любой сюрьективный квадратичный оператор определенный на симплексе S^3, соответствует некоторому само совмещению. Это операторыявляется гомеоморфизмом симплекса S^3 .Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3, сюрьективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Ключевые слова. сюрьективный, квадратичный, оператор, симплекс, гомеоморфизмом. биективен. само совмещения, тетраэдр, преобразования, группа, вершина, перемещение, выпуклая, линейная, комбинация, композициея.

В этом параграфе мы дадим полное описание всех крайних точек множества квадратичных операторов, определенных на S^3**.**

В § 2.1 было дано полное описание множества всех сюрективных квадратичных операторов, определенных на S^3. Было доказано, что это множество состоит из 24 классов $\tilde{v}_l$, $l=\overline{1,24}$ таких, что каждый оператор $V \in \tilde{v}_l$ соответствует само совмещению π_l, $l=\overline{1,24}$.

Следующая теорема описывает крайние точки множества сюрьективных квадратичных операторов.

Теорема 2.2.1. Для любого $l=\overline{1,24}$ совокупность крайних точек множества $\tilde{v}_l$ сюрьективных квадратичных операторов состоит из 64 элементов.

Доказательство. Каждое множество $\widetilde{v}_l,\ l=\overline{1,24}$ состоит из квадратичных операторов $V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta)$, соответствующих самосовмещению π_l, где $\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta\in[0,1]$.

Рассмотрим совокупность квадратичных операторов

$\{V_1(1,0,0,0,0,0);\ \ V_2(0,1,0,0,0,0);\ldots;V_6(0,0,0,0,0,1);\ V_7(1,1,0,0,0,0);$
$V_8(1,0,1,0,0,0);\ldots;\ V_{21}(0,0,0,0,1,1);\ \ V_{22}(1,1,1,0,0,0);\ V_{23}(1,1,0,1,0,0);\ldots$
$V_{41}(0,0,0,1,1,1);\ \ V_{42}(1,1,1,1,0,0);\ \ V_{43}(1,1,1,0,1,0);\ldots;V_{56}(0,0,1,1,1,1);$
$V_{57}(1,1,1,1,1,0);\ \ V_{58}(1,1,1,1,0,1);\ldots;V_{62}(0,1,1,1,1,1);\ \ V_{63}(1,1,1,1,1,1);$
$V_{64}(0,0,0,0,0,0)\}$

Все эти операторы принадлежат одному и тому же классу $\widetilde{v}_l$.

Каждый квадратичный оператор, определенный на S^3, принадлежащий классу $\widetilde{v}_l$, является выпуклой комбинацией квадратичных операторов V_l при $l=\overline{1,64}$ и при этом не является таковой для любого меньшего числа операторов.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{j=1}^{64}\lambda_j V_j = V_l(\alpha,\beta,\gamma,\xi,\eta,\delta) \qquad (2.2.1)$$

где $\lambda_l\ge 0$ и $\sum\limits_{l=1}^{64}\lambda_l=1$.

Очевидно, что ни одно $V_l,\ l=\overline{1,64}$ не является выпуклой линейной комбинацией остальных операторов. Например, покажем, что $V_{64}\in\widetilde{v}_1$

$$V_{64}(0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0):\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

Не является выпуклой линейной комбинацией $V_l\in\widetilde{v}_1\ \ l=\overline{1,63}$.

Остальные случаи доказываются аналогично.

Пусть $V_{64}=\sum_{l=1}^{63}\lambda_l V_l$.

Тогда из представлений V_{64} имеем 30 уравнений с правой частью, равной нулю, и $\sum_{l=1}^{63}\lambda_l=1$. $\lambda_l\geq 0$.

Очевидно, что система не имеет решений, т.к. из 30 уравнений и последних неравенств следует $\lambda_l=0$ для всех $l=\overline{1,63}$ что противоречит $\sum_{l=1}^{63}\lambda_l=1$ Разрешимость (2.2.1) легко следует из следующего замечания. Рассмотрим шестимерный куб

$$K=\{(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6);\ 0\leq y_l\leq 1,\ l=\overline{1,6}\}.$$

Очевидно, точки

$$\begin{aligned}&\{B_1(1,0,0,0,0,0);\quad B_2(0,1,0,0,0,0);\ldots;B_6(0,0,0,0,0,1);\ B_7(1,1,0,0,0,0);\\&B_8(1,0,1,0,0,0);\ldots;\ B_{21}(0,0,0,0,1,1);\quad B_{22}(1,1,1,0,0,0);\ B_{23}(1,1,0,1,0,0);\ldots\\&B_{41}(0,0,0,1,1,1);\quad B_{42}(1,1,1,1,0,0);\quad B_{43}(1,1,1,0,1,0);\ldots;B_{56}(0,0,1,1,1,1);\\&B_{57}(1,1,1,1,1,0);\quad B_{58}(1,1,1,1,0,1);\ldots;B_{62}(0,1,1,1,1,1);\quad B_{63}(1,1,1,1,1,1);\\&B_{64}(0,0,0,0,0,0)\}\end{aligned}$$

Являются крайними точками куба, и любая точка $C(a,b,c,d,e,f)$ является выпуклой комбинацией этих крайних точек, т.е. существуют неотрицательные V_l, $l=\overline{1,64}$ такие, что

$$C=\sum_{l=1}^{64}\lambda_l B_l$$

Координатная запись этого соотношения не что иное, как система (2.2.1), откуда и следует утверждение теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.2. Совокупность крайних точек множества всех квадратичных операторов, определенных на S^3, состоит из $4^{10}=1048576$ элементов, причем $24x2^6=1536$ из них является сюрьективными.

Доказательство. Квадратичный оператор определяется матрицей

$$\left[\begin{array}{cccc|cccccc} P_{11,1} & P_{22,1} & P_{33,1} & P_{44,1} & P_{12,1} & P_{13,1} & P_{14,1} & P_{23,1} & P_{24,1} & P_{34,1} \\ P_{11,2} & P_{22,2} & P_{33,2} & P_{44,2} & P_{12,2} & P_{13,2} & P_{14,2} & P_{23,2} & P_{24,2} & P_{34,2} \\ P_{11,3} & P_{22,3} & P_{33,3} & P_{44,3} & P_{12,3} & P_{13,3} & P_{14,3} & P_{23,3} & P_{24,3} & P_{34,3} \\ P_{11,4} & P_{22,4} & P_{33,4} & P_{44,4} & P_{12,4} & P_{13,4} & P_{14,4} & P_{23,4} & P_{24,4} & P_{34,4} \end{array}\right]$$

Все элементы которой неотрицательны и сумма стоблцов равна единице. Рассмотрим множество всех стохастических по столбцам матриц 4x4. Очевидно, что это множество имеет $4^4 = 256$ крайних точек.

Так как матрица (2.2.2.) составлена из двух стохастических по столбцам матриц 4x4 и 4x6, то общее число крайних точек равно $4^{10} = 1048576$. Из них как показано в теореме 2.2.1, 1536 крайних точек определяют сюрьективные квадратичные операторы. Остается описать 1047040 оставшихся крайних точек.

Пусть $H_1 = \{e_l\}_{l=1}^{256}$ и $H_2 = \{f_j\}_{j=1}^{4096}$ совокупность всех крайних точек множества стохастических по столбцам матриц 4x4 и 4x6 соответственно. Для определения действия группы самосовмещений $G = \{\pi_k\}k \overset{24}{=} 1$ на H_1 явно пишем все элементы

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

,….,

$$e_{253} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ e_{254} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ e_{255} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_{256} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Самосовмещения π_k определяются квадратичными матрицами, задающими перестановки координат следующим образом: $\pi_k = e_{232+k}, k = \overline{1{,}24}$

, и тогда действие группы $G=\{\pi_k\}_{k=1}^{24}$ на H_1 определяется следующей формулой: для любого $e_l\in H_1$ и для любого $\pi_j\in G$ положим $\pi_j(e_l)=\pi_j e_l$. Тогда под траекторией группы G, начинающейся в точке $e_k\in H_1$ понимается множество

$$\{e_k=\pi_1(e_k),\ \pi_2(e_k),\ldots,\ \pi_{24}(e_k)\}\subset H_1$$

Рассмотрим траектории группы G и H_1. Легко проверить, что

$$\{G(e_1)\}=\{e_1,e_2,e_3,e_4\},$$

$$\{G(e_{12n+5})\}_{n=0}^{6}=\{e_{12n+5},\ e_{12n+6},\ldots,\ e_{12n+16}\}_{n=0}^{6}$$

$$\{G(e_{24n+17})\}_{n=3}^{9}=\{e_{24n+17},\ e_{24n+18},\ldots,\ e_{24n+40}\}_{n=3}^{9}$$

Покажем справедливость этих соотношений в одном случае $\{G(e_{12n+5})\}_{n=0}^{6}=\{e_{12n+5},\ e_{12n+6},\ldots,\ e_{12n+16}\}$.

Остальные случаи проверяются аналогично.

$$\pi_1(e_{29})=\pi_1 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{29}$$

$$\pi_2(e_{29})=\pi_2 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{30}$$

$$\pi_3(e_{29})=\pi_3 e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{31}$$

$$\pi_4(e_{29})=\pi_4 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{36}$$

$$\pi_5(e_{29})=\pi_5 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{39}$$

$$\pi_6(e_{29})=\pi_6 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{34}$$

$$\pi_7(e_{29})=\pi_7 e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{38}$$

$$\pi_8(e_{29})=\pi_8 e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{33}$$

$$\pi_9(e_{29})=\pi_9 e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{35}$$

$$\pi_{10}(e_{29})=\pi_{10} e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{32}$$

$$\pi_{11}(e_{29})=\pi_{11}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{40}$$

$$\pi_{12}(e_{29})=\pi_{12}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{37}$$

$$\pi_{14}(e_{29})=\pi_{14}e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{30}$$

$$\pi_{15}(e_{29})=\pi_{15}e_{29}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{31}$$

$$\pi_{16}(e_{29})=\pi_{16}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{36}$$

$$\pi_{17}(e_{29})=\pi_{17}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{39}$$

$$\pi_{18}(e_{29})=\pi_{18}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{34}$$

$$\pi_{19}(e_{29})=\pi_{19}e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{38}$$

$$\pi_{20}(e_{29})=\pi_{20}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{33}$$

$$\pi_{21}(e_{29})=\pi_{21}e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{35}$$

$$\pi_{22}(e_{29})=\pi_{22}e_{29}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=e_{32}$$

$$\pi_{23}(e_{29})=\pi_{23}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=e_{40}$$

$$\pi_{24}(e_{29})=\pi_{24}e_{29}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=e_{37}$$

Крайние точки множества квадратичных операторов определяются матрицами (e_l / J_j), $l=\overline{1,256}$, $j=\overline{1,4096}$. В силу приведенного выше описания траекторий группы G в H_1 достаточно изучить крайние точки, определяемые матрицами

$$Q=\{(e_1/J_j):\ \{(e_{5+12l}/J_j)\}_{l=0}^{6},\{(e_{24l+17}/J_j)\}_{l=3}^{9}\}\quad \overline{j=1,4096},$$

а остальные получаются из них само совмещениями, из этих $4^6 x15$ крайних точек одна крайняя точка (e_1/J_1), очевидно, определяет квадратичный оператор, переводящий симплекс S^3 в вершину A_1.

Далее, крайние точки из определенного выше семейства, в которых вторая и третья или вторая и четвертая, или четвертая и третья строки целиком состоят из нулей, задают квадратичные операторы, переводящие симплекс в одно из ребер $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ или $A_1 A_4$, число таких крайних точек равно 637; а крайние точки, в которых вторая или третья, или четвертая строки целиком состоят из нулей, задают квадратичные операторы, переводящие симплекс в один из треугольников $\Delta A_1 A_2 A_3$ или $\Delta A_1 A_2 A_4$ или $\Delta A_1 A_3 A_4$, число таких точек равно 16219.

В множестве Q 64 матрицы определяют сюрьективные квадратичные операторы: таким образом, остается исследовать $4^6 x15-(1+637+16219+64)=44519$ крайних точек.

Для 2100 крайних точек соответствующие квадратичные операторы оставляют вершину A_1 неподвижной, а остальные три вершины A_1, A_2 и A_4 также переводят в вершину A_1. Опишем любую из этих крайних точек. Анализ остальных проводится аналогично.

Квадратичный оператор, соответствующий матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_2' = 2x_1 x_2 + 2x_1 x_4 \\ x_3' = 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3 \\ x_4' = 2x_2 x_4 + 2x_3 x_4 \end{cases} \qquad (3)$$

В силу неравенства

$$ab \le 1/4 \text{ для } a+b=1 \text{ и } a \ge b; \quad b \ge 0 \qquad (4)$$

Очевидно

$$x_2' = 2x_1x_2 + x_1x_4 \le 2x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \le 1/2$$
$$x_3' \le 1/2$$
$$x_4' \le 1/2$$

Откуда имеем, что образ симплекса S^3 при отображении (3) имеет вид:
$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'): x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 1,\ x_2' \le 1/2,\ x_3' \le 1/2,\ x_4' \le 1/2\}$

Для описания крайних точек $\{(e_{5+12l} / J_j)\}_{l=0}^{6}$, число которых составляет 18914, достаточно исследовать одну крайнюю точку, остальные исследуются аналогично. Рассмотрим квадратичный оператор, определенный матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Квадратичный оператор имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_2' = 2x_1x_2 + 2x_1x_4 \\ x_3' = 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ x_4' = 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases}$$

В силу неравенства (4) $x_3' \le 1/2$ и $x_4' \le 1/2$, т.е. образ симплекса этого квадратичного оператора содержится в множестве

$$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'):\ x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 1,\ \ x_3' \le 1/2,\ \ x_4' \le 1/2\}.$$

Для описания крайних точек $\{(e_{24l+17}/J_j)\}_{l=3}^{8}$, число которых составляет 19473, достаточно исследовать одну крайнюю точку, остальные исследуются аналогично. Рассмотрим квадратичный оператор, определенный матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Квадратичный оператор имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 \\ x_2' = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 \\ x_3' = 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_4^2 \\ x_4' = 2x_2x_4 + 2x_3x_4 \end{cases}$$

В силу неравенства (4) $x_4' \le 1/2$, т.е. образ симплекса этого квадратичного оператора содержится в множестве

$$\{(x_1', x_2', x_3', x_4'): x_1 + x_2' + x_4' = 1, \quad x_4' \le 1/2\}.$$

Остается тепер описать крайние точки $(e_{233} \mid J_j)$ для j, для которых $(e_{233} \mid J_j)$ не сюрьективны. Число таких точек равно 4032. Рассмотрим, например, квадратичный оператор

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Остальные описываются аналогично.

Квадратичный оператор, соответствующий матрице (5), имеет вид

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3 \\ x_2' = x_4^2 \\ x_3' = x_3^2 \\ x_2' = x_4^2 \end{cases}$$

Это квадратичный оператор вершины симплекса оставляет неподвижными.

Заключение

в этом статей исследованы все крайне точки множества квадратичных операторов, определенных на симплекса S^3 .с помощей

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедиз, 1938. 125с.

2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связаной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.

3.Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.

4.Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.