



СЮРЬЕКТИВНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ОПЕРАТОРЫ СООТВЕТСТВУЮЩИЕ НЕКОТОРОМУ САМО СОВМЕЩЕНИЮ.

Мейлиев Х.Ж. (Иктисодтёт ва Педагогика Университети)

Аннотация; Любой сюръективный квадратичный оператор определенный на симплексе S^3 , соответствует некоторому само совмещению. Это оператор является гомеоморфизмом симплекса S^3 . Квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3 , сюръективен тогда и только тогда, когда он биективен.

Ключевые слова. сюръективный, квадратичный, оператор, симплекс, гомеоморфизмом. биективен. само совмещения, тетраэдр, преобразования, группа, вершина, перемещение, выпуклая, линейная, комбинация, композиция.

На $S^3 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : x_l \geq 0, l = \overline{1,4}; \sum_{l=1}^4 x_l = 1 \right\}$ произвольный квадратичный оператор V , заданный следующим образом

$$(Vx)_k = \sum_{l,j=1}^4 P_{lj,k} x_l x_j, \quad k = \overline{1,4} \quad (1)$$

$$\text{где } P_{lj,k} \geq 0, \quad P_{lj,k} = P_{jl,k}, \quad \sum_{l,j=1}^4 P_{lj,k} = 1$$

Мы определим 24 класса сюръективных квадратичных операторов и докажем, что они исчерпывают все множество сюръективных квадратичных операторов. Для описания этих классов воспользуемся хорошо известными группами само совмещений правильных многогранников [1], так как S^3 является правильным тетраэдром.



Заметим, что под само совмещением понимается перемещение, т.е. преобразование, сохраняющее метрику. Группа само совмещений тетраэдра в R^3 состоит из 12 элементов. Но мы рассматриваем симплекс в R^4 тогда несложно показать, что группа само совмещений тетраэдра, G в R^4 состоит из группы всех перестановок вершин этого тетраэдра т.е. $G = \{\pi_l\}_{l=1}^{24}$.

Будем говорить, что квадратичный оператор V , определенный на симплексе S^3 , соответствует некоторому само совмещению π_l , если V переводит вершины симплекса S^3 в вершины и ребра симплекса в ребра таким же образом, как само совмещение $\pi_l, l = \overline{1,24}$.

Теорема 1.1. Любой сюръективный квадратичный оператор, определенный на симплексе S^3 , соответствует некоторому само совмещению $\pi_l, l = \overline{1,24}$.

Доказательство теоремы 1.1 сведем к доказательству следующих трех лемм.

Лемма 1.1. Пусть V -сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренняя точка симплекса S^3 не может перейти при отображении V в одну из вершин симплекса.

Лемма 1.2. Пусть V сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая внутренняя точка симплекса S^3 не может перейти при отображении V в граничную точку симплекса.

Лемма 1.3. Пусть V - сюръективный квадратичный оператор. Тогда никакая граничная точка, отличная от вершин, не может перейти при отображении V в одну из вершин симплекса.

Доказательство теоремы 1.1. В силу лемм 1.1-1.3 сюръективный квадратичный оператор переводит вершины симплекса в вершины и ребра в ребра, т.е. сюръективному квадратичному оператору соответствует некоторое само совмещение $\pi_l, l = \overline{1,24}$.



Определим теперь, какого вида квадратичные операторы соответствуют каждому само совмещению правильного тетраэдра.

Начнем с тождественного само совмещения π_1 . Квадратичный оператор V , соответствующий этому само совмещению, должен удовлетворять следующим условиям: $V(A_l) = A_l$, $l = 1, 2, 3, 4$ и также

$$\begin{aligned} V([A_1, A_2]) &= [A_1, A_2], \quad V([A_1, A_3]) = [A_1, A_3], \quad V([A_1, A_4]) = [A_1, A_4] \\ V([A_2, A_3]) &= [A_2, A_3], \quad V([A_2, A_4]) = [A_2, A_4], \quad V([A_3, A_4]) = [A_3, A_4] \end{aligned}$$

Если переписать эти условия с помощью (1), учитывая, что $A_1(1,0,0,0)$, $A_2(0,1,0,0)$, $A_3(0,0,1,0)$, $A_4(0,0,0,1)$ то получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} P_{11,1} &= 1 & P_{22,1} &= 0 & P_{33,1} &= 0 & P_{44,1} &= 0 \\ P_{11,2} &= 0 & P_{22,2} &= 1 & P_{33,2} &= 0 & P_{44,2} &= 2 \\ P_{11,3} &= 0 & P_{22,3} &= 0 & P_{33,3} &= 1 & P_{44,3} &= 0 \\ P_{11,4} &= 0 & P_{22,4} &= 0 & P_{33,4} &= 0 & P_{44,4} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Теперь, так как произвольная точка, принадлежащая ребру $[A_1, A_2]$ имеет координаты $(x_1, 1-x_1, 0, 0)$ то из $V([A_1, A_2]) = [A_1, A_2]$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= x'_3 = P_{11,3}x_1^2 + P_{22,3}(1-x_1)^2 + 2P_{12,3}x_1(1-x_1) \\ 0 &= x'_4 = P_{11,4}x_1^2 + P_{22,4}(1-x_1)^2 + 2P_{12,4}x_1(1-x_1) \end{aligned}$$

И из (1) следует, что $2P_{12,3} = 0$, $2P_{12,4} = 0$ откуда $P_{12,3} = 0$, $P_{12,4} = 0$; аналогично из $V([A_1, A_3]) = [A_1, A_3]$, $V([A_1, A_4]) = [A_1, A_4]$, $V([A_2, A_3]) = [A_2, A_3]$, $V([A_2, A_4]) = [A_2, A_4]$, $V([A_3, A_4]) = [A_3, A_4]$.

Имеем

$$\begin{aligned} P_{23,1} &= 0 & P_{24,1} &= 0 & P_{34,1} &= 0 & P_{13,2} &= 0 & P_{14,2} &= 0 \\ P_{14,3} &= 0 & P_{24,3} &= 0 & P_{34,2} &= 0 & P_{13,4} &= 0 & P_{23,2} &= 0 \end{aligned}$$

Таким образом, квадратичные операторы, соответствующие само совмещению π_1 , имеют следующий вид:



$$V_1(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\alpha & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\beta & 0 & 1-\xi & 0 & \delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1-\gamma & 0 & 1-\eta & 1-\delta \end{bmatrix}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta \in [0, 1]$ - произвольные числа.

Очевидно, что выпуклая линейная комбинация квадратичных операторов, соответствующих само совмещению π_1 , также соответствует этому само совмещению.

Покажем, что квадратичный оператор $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ отвечающий само совмещению π_1 , совпадает с само совмещением π_1 . Действительно, при $\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta = 1/2$ квадратичный оператор $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ является тождественным оператором, т.к.

$$\begin{cases} x'_1 = x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_2 = x_2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_3 = x_3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ x'_4 = x_4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{cases}$$

откуда в силу того, что $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, получим, что $V_1(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ совпадает с само совмещением π_1 .

Для квадратичных операторов класса $V_1(\alpha, \beta, \gamma, \xi, \eta, \delta)$ преобразование (1) принимает вид:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1[1 + (2\alpha - 1)x_2 + (2\beta - 1)x_3 + (2\gamma - 1)x_4] \\ x'_2 = x_2[1 + (1 - 2\alpha)x_1 + (2\xi - 1)x_3 + (2\eta - 1)x_4] \\ x'_3 = x_3[1 + (1 - 2\beta)x_1 + (1 - 2\xi)x_2 + (2\delta - 1)x_4] \\ x'_4 = x_4[1 + (1 - 2\gamma)x_1 + (1 - 2\eta)x_2 + (1 - 2\delta)x_3] \end{cases} \quad (3)$$

Квадратичный оператор вида (3) относится к классу вольтеровских операторов. Этот класс операторов рассмотрен в [3]. В частности, для



вольтеровских квадратичных операторов доказано, что операторы такого типа являются взаимно однозначными и, взаимно непрерывными операторами [3]. Отсюда имеем следующее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С. Введение в теорию групп. М.: Учпедгиз, 1938. 125с.
2. Бернштейн С.Н. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Уч. Зап. Н.И. кафедр. Украины, отд.матем.1924, вып.1.с 83-115.
- 3.Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы. Функции Ляпунова и турниры.// Матем. Сб.,1992.Т.183, №8, с. 119-140.
- 4.Генетика и наследственность. // Сб .статей. Мю,1987. 300 с.