FUNKSIYALARNI SONLI INTEGRALLASH

Xushmurodova Luiza G'ayratovna

Toshkent shahar Shayxontohur tuman Politexnikumi Matematika fani o'qituvchisi

ANNOTATSIYA. *Funksiyalarni sonli integrallash – aniq integralni analitik usulda topish qiyin bo'lgan hollarda, uning taxminiy qiymatini hisoblash usuli hisoblanadi. Ushbu yondashuv differensial va integral tenglamalar, fizika, muhandislik, iqtisodiyot va boshqa ilmiy sohalarda keng qo'llaniladi. Sonli integrallash usullari orasida to'g'ri to'rtburchaklar metodi, trapetsiya metodi, Simpson formulasi va Gauss kvadraturasi kabi samarali algoritmlar mavjud. Ushbu usullar funksiyaning ma'lum diskret nuqtalarida qiymatini hisoblash va uni integrallash orqali taqribiy natijalarni olishga asoslanadi. Sonli integrallash aniqlik va hisoblash tezligi jihatidan muhim omillarga ega bo'lib, kompyuter hisob-kitoblarida katta ahamiyatga ega.*

Ushbu maqolada funksiyalarni sonli integrallashning asosiy tamoyillari, turli usullar va ularning qo'llanilish sohalari haqida batafsil ma'lumot beriladi.

KALIT SO'ZLAR: *Sonli integrallash, Aniq integral, Taqribiy hisoblash, To'rtburchaklar metodi, Trapetsiya metodi, Simpson formulasi, Gauss kvadraturasi, Diskretizatsiya, Analitik integrallash, Raqamli hisoblash, Kompyuterda integrallash, Funksiya interpolatsiyasi, Integrallash xatoligi, Matematik model, Differensial tenglamalar.*

KIRISH

Funksiyalarni sonli integrallash – aniq integralni analitik usulda topish qiyin yoki imkonsiz bo'lgan hollarda, uning taxminiy qiymatini hisoblash uchun qo'llaniladigan matematik usullardan biridir. Ko'plab amaliy masalalarda, ayniqsa, fizikada, muhandislikda va iqtisodiyotda funksiyalar analitik tarzda integrallash mushkul bo'lib, ularni sonli usullar yordamida hisoblash samarali natijalar beradi.

Sonli integrallash usullari, masalan, to‘rtburchaklar metodi, trapetsiya metodi, Simpson formulasi va Gauss kvadraturasi, funksiya qiymatlarini ma’lum nuqtalarda hisoblash orqali uning integralini taxminiy hisoblashga asoslanadi. Bu usullar hisoblash texnikalari va kompyuter dasturlarida keng qo‘llanilib, katta hajmdagi hisob-kitob ishlarini bajarishda samaradorlikni oshiradi.

ASOSIY QISM

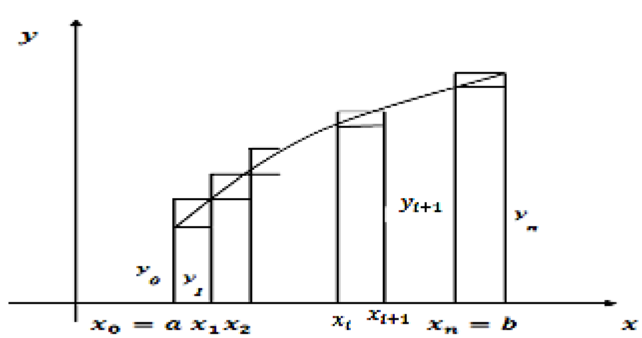
Funksiyalarni sonli integrallashning to’g’ri turtburchak, trapetsiya, simpson metodlariga dastur tuzish

I. To’g’ri to’rtburchaklar formulasi. Bu formulani keltirib chiqarish uchun dastlab $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = b$ nuqtalar bilan n ta teng bo’lakka bo’lamiz. Bunda har bir bo’lakning uzunligi $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ga teng bo’ladi (1-chizma)

Integral ostidagi $f(x)$ funksiyaning $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n$ nuqtalardagi qiymartlarini $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{n-1}, y_n$ lar bilan belgilaymiz va quyidagi

yig’indilarni tuzamiz:

$y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x; \quad y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + + \cdots + y_n\Delta x. y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x; \quad y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + + \cdots + y_n\Delta x. y_0 \cdot \Delta x + y_1 \cdot \Delta x + y_2 \cdot \Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x; \quad y_0\Delta x + y_1\Delta x + y_2\Delta x + + \cdots + y_n\Delta x.$



1-chizma

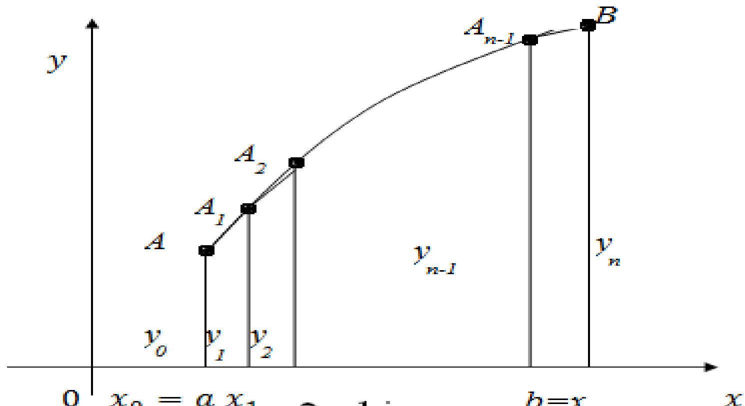
Bu yig'indilarni har biri $f(x)$ funksiya uchun $[a, b]$ kesmada integral yig'indi bo'lib, ular uchun quyidagi taqribiy formulalarni yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n)$$

Bu formulalar to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.

II. Trapetsiyalar formulasi. Yuqorida ko'rib o'tilgan to'g'ri to'rtburchaklar formulasida biz $y = f(x)$ egri chiziqni zinopayali chiziqlar bilan almashtirgan edik. Agar biz $y = f(x)$ ni ichki chizilgan siniq chiziqlar bilan almashtirsak, aniq integralning aniqroq qiymatini hosil qilamiz. Bunda $aABb$ egri chiziqli trapetsiya yuqoridan $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ vatarlar bilan chegaralangan trapetsiyachalar yig'indisidan iborat bo'ladi(2-chizma). Bunda birinchi



2-chizma

trapetsiyachaning yuzi $\frac{y_0+y_1}{2} \cdot \Delta x$, ikkinchisining yuzi $\frac{y_1+y_2}{2} \cdot \Delta x$ va hokazo bo'lib $\int_a^b f(x)dx \approx (\frac{y_0+y_1}{2} \cdot \Delta x + \frac{y_1+y_2}{2} \cdot \Delta x + \cdots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2} \cdot \Delta x)$ yoki

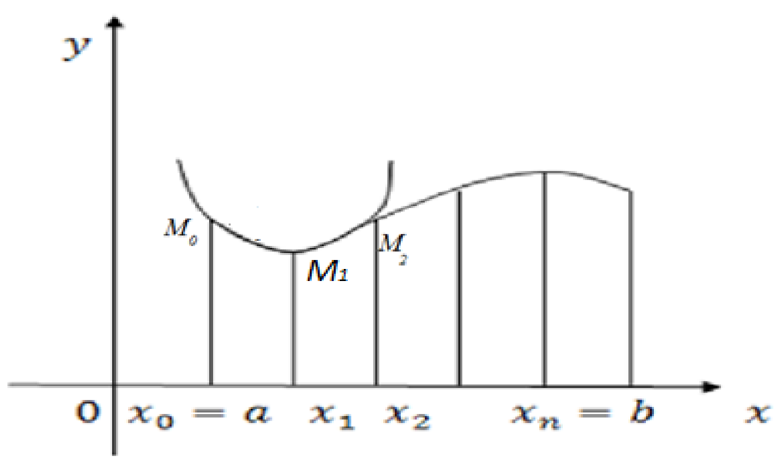
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

bo'ladi. Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar formulasi deyiladi. Bu yerda n soni ixtiyoriy tanlanadi. n soni qanchalik katta bo'lsa, integralning qiymati shunchalik aniq bo'ladi.

III. Parabola formulasi (Simpson formulasi). $[a,b]$ kesmani $n=2m$ ta teng bo'laklarga bo'lamiz. $[x_0,x_1]$ va $[x_1,x_2]$ kesmalarga mos kelgan va $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralgan egri chiziqli trapetsiyachalarning yuzlarini $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1), M_2(x_2,y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi parabola bilan chegaralgan egri chiziqli trapetsiya bilan almashtiramiz. Bunday egri chiziqli trapetsiyani parabolik trapetsiya deyiladi (3-chizma).

O'qi $0y$ o'qiga parallel bo'lgan parabo'lani tenglamasi

$y=Ax^2+Bx+C$ dan iborat bo'ladi.



3-chizma

A, B, C koeffitsientlar parabolaning berilgan uchta nuqtadan o'tish shartidan topiladi. Qolgan kesmalar uchun ham yuqoridagidek parabolalarni yasaymiz. Hosil bo'lgan parabolik trapetsiyachalar yuzlarining yig'indisi integralning taqribiy qiymatini beradi. U quyidagi formuladan iborat boladi:

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + + \cdots + y_{2m-1})]$.

Bu formula Simpson formulasi deyiladi.

Yuqorida biz $\int_a^b f(x)\,dx$ integralni integrallash kesmasi $[a;b]$ chekli va integral ostidagi funksiya uzluksiz bo'lgan hollarda o'rgandik.

Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ cheksiz yarim oraliq bo'yicha I tur xosmas integrali deb yuqori chegarasi o'zgaruvchi $F(b)$ integralning $b \to +\infty$ bo'lgandagi limitiga aytiladi va u

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ deb belgilanadi. Demak, ta'rifga asosan, u

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

ko'rinishda belgilanadi.

Agar yuqoridagi tenglamaning o'ng tomonidagi limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, uzoqlashuvchi deyiladi.

Ko'p hollarda xosmas integralning aniq qiymatini bilish shart bo'lmasdan, uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini va yaqinlashuvchi bo'lgan holda qiymatini baholash yetarli bo'ladi.

XULOSA

Funksiyalarni sonli integrallash matematik analiz va hisoblash matematikasining muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, analitik tarzda integrallash qiyin bo'lgan funksiyalarni taqribiy hisoblash imkonini beradi. Sonli integrallash usullari, jumladan, to'rtburchaklar metodi, trapetsiya metodi, Simpson formulasi va Gauss kvadraturasi, turli matematik va muhandislik masalalarida keng qo'llaniladi.

Bu usullarni qo‘llash natijasida hisoblash jarayoni tezlashib, katta miqdordagi ma’lumotlar bilan ishlash imkoniyati kengayadi. Shuningdek, har bir usulning o‘ziga xos aniqlik darajasi va hisoblash xatoligi mavjud bo‘lib, ularni tanlashda funksiyaning xususiyatlari va talab qilinayotgan aniqlik darajasi hisobga olinishi lozim.

Umuman olganda, sonli integrallash zamonaviy fan va texnikaning ajralmas qismi bo‘lib, uning rivojlanishi kompyuter texnologiyalari bilan chambarchas bog‘liq. Kelajakda yangi usullar va algoritmlar ishlab chiqilishi bu sohaning yanada takomillashishiga xizmat qiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Butkov, E. "Matematik analiz". Toshkent: O‘zbekiston, 2015.
2. Kreyzig, E. "Advanced Engineering Mathematics". John Wiley & Sons, 2011.
3. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. "Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing". Cambridge University Press, 2007.
4. Hildebrand, F. B. "Introduction to Numerical Analysis". Dover Publications, 1987.
5. Burden, R. L., Faires, J. D. "Numerical Analysis". Brooks Cole, 2010.
6. O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim muassasalari uchun "Hisoblash matematikasi" darsligi. Toshkent: Fan, 2019.