



BERUNIY VA ULUG'BEKNING TRIGONOMETRIK "ZIJ" LARI

Jumayeva Hurmatoy Xolmurotovna

Buxoro muhandislik-texnologiya instituti

"Aniq fanlar" kafedrası assistenti

jumayeva.hurmatoy@mail.ru

Annotatsiya. Mustaqil davlatimizning kuch-qudrati xalqimizning umuminsoniy qadriyatlariga sodiqligidadir. Ushbu maqolada qomusiy olimlarimiz, shu jumladan yirik olimlarimizdan asosan Beruniy va Ulug'bekning matematika faniga qo'shgan hissalari haqida ma'lumot beriladi. Ulug'bek va uning ilmiy xodimlari tomonidan qo'lga kiritilgan fan sohasidagi yutuqlarning muhim natijasi bo'lib "Ulug'bek ziji" yoki "Ziji Ko'ragoniy" nomi bilan yuritiluvchi astronomik jadvallar haqida so'z yuritiladi. Maqolada mavzuga oid kalit so'zlar ham ta'kidlangan.

Kalit so'zlar. "Ziji Ko'ragoniy", trigonometriya, trigonometrik jadval, vatar, diametr, π soni, sinus, kosinus, tangens, kotangens, gradus.

Ulug'bek va uning ilmiy xodimlari tomonidan qo'lga kiritilgan fan sohasidagi yutuqlarning muhim natijasi bo'lib "Ulug'bek ziji" yoki "Ziji Ko'ragoniy" nomi bilan yuritiluvchi astronomik jadvallar hisoblanadi.

"Ziji Ko'ragoniy" nazariy qismidan va Samarqand rasadxonasida bajarilgan astronomik kuzatishlar natijalaridan tashkil topgan. Kuzatish natijalari esa yil hisobi, trigonometrik va planetalar harakatlari jadvallari va yulduzlar kataloglaridan iborat.

Ulug'bek ilmiy maktabi asarlarida trigonometrik jadvallar ham salmoqli o'rinni egallaydi. "Ulug'bek ziji" dagi trigonometrik jadvallar tuzish masalasiga bag'ishlangan bob sinus, sinus-verzus, kosinus shuningdek ular orasidagi umumiy



asosiy munosabatlar haqidagi umumiy xarakterdagi mulohazalardan boshlanadi.

“Sinuslar va soyalar (ya’ni tangenslar), - davom etadi Ulug’bek, - bir gradus sinusi yordamida hisoblanadi”...

Ulug’bek o’z zamonasining terminologiyasi qoidalariga binoan biror yoy tangensi va kotangensini hisoblaydi. Buning uchun u avvalo soya haqidagi masalani to’la-to’kis qarab chiqadi. Oldin tomonni, keyin aylana yoyini tadqiq qiladi. Soyaning har xil xossasini bayon etib, Ulug’bek asta-sekin masalani umulashtiradi va soyani trigonometrik chiziq sifatida qaray boshlaydi. Birinchi soya deb kotangensini qabul qiladi.

Ulug’bek biron yoy (birinchi) soyasi bilan shu yoy to’ldirish soyasi orasidagi trigonometrik munosabatni tadqiq qiladi. Uning aytishicha: “Bu qoida zamin qilib olindi. Bu asosda soyalar jadvallarini hisoblash aylananing sakkizdan biri uchun jadvallar hisoblashga keltiriladi”

Oxirida Ulug’bek aytadi: “Biz jadvallarda birinchi soyalarni keltirdik. Ular sinuslar kabi 45° dan 90° gacha esa – har besh minut uchun hisoblanadi. Boshqa jadvalda ikkinchi soyalar graduslarda berilgan”.

Ulug’bek trigonometrik jadvallarning aniqlik darajasini bilish maqsadida ba’zi burchaklar, 20° , 23° , 26° lar sinuslarining qiymatlarini tekshiramiz. Oltmishlik sistemasidan o’nlik sistemasiga o’tib olamiz:

$$\sin 20^\circ = \frac{20}{60} + \frac{3}{60^2} + \frac{16}{60^3} + \frac{21}{60^4} + \frac{3}{60^5};$$

$$\sin 23^\circ = \frac{23}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{37}{60^3} + \frac{55}{60^4} + \frac{26}{60^5};$$

$$\sin 26^\circ = \frac{26}{60} + \frac{18}{60^2} + \frac{8}{60^3} + \frac{10}{60^4} + \frac{4}{60^5}$$

yoki,

$$\sin 20^\circ = 0,32020142,$$

$$\sin 23^\circ = 0,390731129,$$

$$\sin 26^\circ = 0,438371147.$$



Bu qiymatlarini ularning haqiqiy qiymatlari bilan solishtirib, quyidagi jadvalga ega bo'lamiz:

Ulug'bek hisobiga		Haqiqiy qiymati	
α	$\sin \alpha$	α	$\sin \alpha$
20°	0,32020142	20°	0,32020143
23°	0,390731129	23°	0,390731128
26°	0,438371147	26°	0,438371147

Bu jadval nima demoqchi ekanligi ko'rinib turibdi, u sharhlashga muhtoj emas.

Quyidagi misollarning yechilish usullarini keltiramiz.

1. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$ ni hisoblang.

Yechish yo'li: Berilgan ko'paytmani quyidagicha qilib yozamiz:

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ &= \frac{2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \sin 20^\circ} = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{2 \cdot 2 \sin 20^\circ} = \\ &= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 80^\circ}{2 \cdot 4 \sin 20^\circ} = \frac{\sin 160^\circ}{8 \sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Binobarin javob: $\frac{1}{8}$

2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$ yig'indini hisoblang.

3.

Yechish yo'li: Berilgan yig'indini S bilan belgilab, ikkala tomonini $2 \sin \frac{x}{2}$

$\sin nx$ ga ko'paytiramiz:

endi $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$ formula tadbiq qilinsa. Ya'ni

$$\sin \frac{x}{2} S = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} + \dots + \cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x = \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x$$



Bunda $\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$ formula inobatga olinsa, quyidagi kelib chiqadi:

$$2 \sin \frac{x}{2} \cdot S = 2 \sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \sin \frac{nx}{2} \text{ yoki } S = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

1. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$ ni hisoblang.
2. Uchburchak tomonlarining uzunliklari $\sin 30^\circ$; $\sin 40^\circ$ va $\sin 60^\circ$ ga teng. Shu uchburchakning turini aniqlang.

Yechish usullari.

1. Berilgan yig'indini S bilan belgilab, ikkala tomonini $2 \sin \frac{x}{2}$ ga ko'paytiramiz:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + 2 \sin \frac{x}{2} \cos 3x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cos nx = -\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \\ &-\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} + \sin \frac{7x}{2} + \dots - \sin \frac{2n-1}{2}x + \sin \frac{2n-1}{2}x = \sin \frac{2n+1}{2}x - \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{n}{2}x \cdot \\ &\cdot \cos \frac{n+1}{2}x \\ \text{bundan } S &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

2. Ma'lumki, quyidagi shartlarga asoslanib, tomoni a , b , va c ga teng bo'lgan uchburchakni turini aniqlaydilar.

- a) $a^2 + b^2 > c^2$ bo'lsa, uchburchak o'tkir burchakli
- b) $a^2 + b^2 = c^2$ bo'lsa, uchburchak to'g'ri burchakli



c) $a^2 + b^2 < c^2$ bo'lsa, uchburchak o'tmas burchakli bo'ladi. Bizning masalada

$$(\sin 30^\circ)^2 + (\sin 40^\circ)^2 < (\sin 30^\circ)^2 + (\sin 45^\circ)^2 =$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4} = (\cos 60^\circ)^2$$

Demak, uchburchak o'tmas burchakli ekan.