# МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ ДРОБНО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

***Маматов Тулкин Юсупович***

*доцент, Бухарский государственный технический университет*

***Аннотация***. *В работе представлены результаты теоретического обоснования применения метода Бубнова-Галеркина и Ритца для нахождения численного решения уравнений с операторами дробного дифференцирования. Задана структура численного решения и получена оценка погрешности приближенного решения по метрике энергетического пространства, порожденного оператором дробного дифференцирования.*

***Ключевые слова***: *уравнение, метод, решение, метод Бубнова-Галеркина, метод Ритца.*

**Введение.** В последние годы наблюдается растущий интерес в области дробного исчисления. Дробные дифференциальные уравнения привлекли повышенное внимание. Актуальность этого работы состоит в том, что дробно-дифференциальные уравнения имеют применение в различных областях науки и техники. Многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, финансам и другим наукам можно описать моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления. Данные задачи, как правило, точно не решаются, поэтому весьма остро стоят вопросы разработки и применения приближенных методов решения с последующим их теоретическим обоснованием для этих уравнений. Отметим, что в последнее время в научной литературе появляются работы, в которых предложены численные методы для некоторых классов уравнений. Однако, несмотря на достигнутый успех в этом направлении, остается открытым вопрос теоретического обоснования применения приближенных методов для более общего класса подобных задач.

**Методика исследования.** Целью этого работы является разработка вычислительной схемы для численного решения дробно-дифференциального уравнения. В работе предлагается обобщенный метод Бубнова-Галеркина и Ритца для нахождения приближенного решения дробно-дифференциальных уравнений.

Рассмотрим уравнение:

$$D^{(\alpha)}u + Tu = f, \quad u, f \in L_2[0, 2\pi], \tag{1}$$

где $D^{(\alpha)} = \dfrac{1}{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\alpha\right)}\left(D_{+}^{(\alpha)} + D_{-}^{(\alpha)}\right)$ определяется с помощью операторов дробного дифференцирования $D_{\pm}^{(\alpha)}$, определяемых для дробных производных для функций $\varphi(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$, по формулам:

$$\left(D_{a+}^{(\alpha)}\varphi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad -\infty < x < \infty,$$

$$\left(D_{b-}^{(\alpha)}\varphi\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{2}$$

здесь $0 < \alpha < 1$. Производные (2) принято также называть производными Римана-Лиувилля порядка $\alpha$, левосторонним и правосторонним, соответственно. $u$ - неизвестная, а $f$ - заданная функции из пространства $L_2[0, 2\pi]$. $T$ - некоторый оператор, для которого $\left(D^{(\alpha)} + T\right)$ - линейный оператор и в общем случае неограниченный и не положительно определенный.

Для достаточно хороших функций оператор $D^{(\alpha)}$ совпадает с оператором Вейля для дробного дифференцирования и действует по правилу:

$$D^{(\alpha)}u \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{\alpha}u_k e^{ikx}. \qquad (3)$$

Здесь $u_k$ - суть коэффициенты Фурье для функции $u$.

Для оператора справедливы следующие леммы.

**Лемма 1.1.** $D^{(\alpha)}$ положительно определенный оператор.

**Лемма 1.2.** $D^{(\alpha)}$ - симметричный оператор.

Учитывая это, введем скалярное произведение и норму соответственно:

$$[u,v]=\left(D^{(\alpha)}u,v\right),\quad [u]=\left(D^{(\alpha)}u,u\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В явном виде скалярное произведение будет выражено как:

$$[u,v]=\left(D^{(\alpha)}u,v\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_k|k|^{\alpha}e^{ikx}v(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|k|^{\alpha}u_k v_k.$$

Пополняя $D\left(D^{(\alpha)}\right)$ по введенной норме, получим энергетическое пространство, обозначим которое через $H_D$.

Умножая исходное уравнение (1) на произвольную функцию $v\in D\left(D^{(\alpha)}\right)$, получим следующее уравнение:

$$[u,v]+(Tu,v)=(f,v).$$

(4)

Уравнение (4) допускает обобщённую постановку задачи. Обобщенным решением уравнения (1) назовем функцию удовлетворяющую уравнению (4) для любой функции $v \in H_D$.

Согласно методу Бубнова-Галеркина, в энергетическом пространстве $H_D$ выбирается система базисных функций $\varphi_j$, $j=\overline{1,N}$. Приближенное решение ищется в виде многочлена по выбранной системе базисных функций в виде:

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j .$$

(5)

Неизвестные коэффициенты $a_j$ определяются из системы уравнений вида:

$$[u_N, \varphi_k] + (Tu_N, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k=\overline{1,N} .$$

(6)

Учитывая представление (5) и линейность введенного и обыкновенного скалярных произведений, получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} a_j [\varphi_j, \varphi_k] + \sum_{j=1}^{N} a_j (T\varphi_j, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k=\overline{1,N} .$$

(7)

**Теорема.** Пусть 1) уравнение (1) имеет единственное решение при данной правой части. 2) Форма $L(u,v)=[u, v]+(Tu, v)$ является $H_D$ определенной и $H_D$ ограниченной, т.е. выполняются условия:

$$L(u, u) \geq \gamma_0^2 [u]^2, \quad L(u,v) \leq \gamma_1^2 [u][v], \ \gamma_0, \gamma_1 \equiv \mathrm{const}.$$

3) Последовательность подпространств $H_N$ линейных оболочек функций $\varphi_j$ , $j=\overline{1,N}$ является предельно плотной в $H_D$.

Тогда при любом конечном $N$ однозначно разрешима система (6) и приближенное решение $u_N$ сходится к точному решению $u$ при $N \to \infty$ по метрике $[\cdot]$ и справедлива оценка погрешности:

$$[u-u_N] \le c\varepsilon(u,N),$$

где $\varepsilon(u,N)$ заданная функция от $N$ (оценка погрешности приближения), удовлетворяющая неравенству:

$$\min_{c_j}\left\| D^{(\alpha)}\left(u-\sum_{j=1}^{N} c_j\varphi_j\right)\right\| \le \varepsilon(u,N) \to 0.$$

Рассмотрим задачу:

$$D^{(\alpha)}u + qu = f(x), \quad x\in(0,1), \quad u(0)=u(1)=0. \qquad (8)$$

**Результаты и их обсуждение.** Приближенное решение (8) будем искать методом Ритца, согласно которому в качестве базисных функций возьмем собственные функции оператора $A = D^{(\alpha)} + q$ с областью определения $D(A)$ состоящих из непрерывных на [0,1] и обладающих производными до второго порядка включительно функций $u(x)$ удовлетворяющих условиями $u(0)=u(1)=0$. Отметим, что собственное значение $\lambda_i$ и соответствующая ему собственная функция $\varphi_i$ оператора $A$, имеют вид $\lambda_i = i^2\pi^2 + q$, $\varphi_i = \sin i\pi x$, $i=1,2,\dots$ . Тогда приближенное решение (8) будем искать в виде:

$$u_N(x)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \sin i\pi x, \tag{9}$$

где неизвестные коэффициенты разложения (9) задаются явно в виде:

$$\alpha_i=\frac{2}{i^2\pi^2+q}\int_0^1 f(x)\sin i\pi x dx.$$

Рассмотрим примеры численной реализации предложенной вычислительной схемы для задачи (1).

Возьмем для задачи (1) значения α=2,5, $q$=1. Тогда уравнение примет вид:

$$D^{(2.5)}u+u=f(x),\ x\in(0,1),\ u(0)=u(1)=0, \tag{10}$$

где правая часть уравнения (10) в явном виде задана как функция:

$$f(x)=\left(1+b^{2.5}\right)\sin bx-\left(1+(\pi-b)^{2.5}\right)\sin(\pi-b)x.$$

Легко показать, что точное решение имеет вид:

$$u(x)=\sin bx-\sin(\pi-b)x.$$

Действительно, применим точное решение к уравнению (10) и воспользуемся равенством $D^{(\alpha)}(\sin bx)=b^{\alpha}\sin bx$, получим:

$$b^{2.5}\sin bx-(\pi-b)^{2.5}\sin(\pi-b)x+\sin bx-\sin(\pi-b)x=$$

$$=\left(1+b^{2.5}\right)\sin bx-\left(1+(\pi-b)^{2.5}\right)\sin(\pi-b)x.$$

В качестве иллюстрации метода приближенные решения (10) будем искать в виде тригонометрического многочлена (9), неизвестные коэффициенты которого найдем из определенного интеграла:

$$\alpha_i = \frac{2}{i^2\pi^2+1}\int_0^1 \left(\left(1+b^{2.5}\right)\sin bx - \left(1+(\pi-b)^{2.5}\right)\sin(\pi-b)x\right)\sin i\pi x dx.$$

Подставляя в формулу $b$=1 получим приближенное решение для $N$=10. Нетрудно видеть, что графики приближенного и точного решений почти совпадают. Кроме того, можно сравнить точные и приближенные значения функции в точках промежутка интегрирования (таблица 1):

Таблица 1.

| $x_i$ | $u(x_i)$ | $u_{10}(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -0.112693 | -0.109898 |
| 0.2 | -0.216672 | -0.201131 |
| 0.3 | -0.303631 | -0.269012 |
| 0.4 | -0.366226 | -0.310407 |
| 0.5 | -0.398157 | -0.324481 |
| 0.6 | -0.394782 | -0.310407 |
| 0.7 | -0.353214 | -0.269012 |
| 0.8 | -0.272511 | -0.201131 |
| 0.9 | -0.153749 | -0.109898 |
| 1.0 | 0 | 0 |

Сравнивая второй и третий столбцы таблицы 1, видно, что расхождения в значениях невелики. Для получения большей точности, найдем приближенное решение исходной задачи для $N$=15.

Точные и приближенные значения заданы таблицей 2:

Таблица 2.

| $x_i$ | $u(x_i)$ | $u_{15}(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -0.112693 | -0.109811 |
| 0.2 | -0.216672 | -0.201220 |
| 0.3 | -0.303631 | -0.268961 |
| 0.4 | -0.366226 | -0.310456 |
| 0.5 | -0.398157 | -0.324419 |
| 0.6 | -0.394782 | -0.310456 |
| 0.7 | -0.353214 | -0.268961 |
| 0.8 | -0.272511 | -0.201220 |
| 0.9 | -0.153749 | -0.109811 |
| 1.0 | 0 | 0 |

Дальнейшее увеличение числа $N$ не привело к повышению точности приближения, что свидетельствует из таблицы 3.

Таблица 3.

| $x_i$ | $u(x_i)$ | $u_{20}(x_i)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | -0.112693 | -0.109793 |
| 0.2 | -0.216672 | -0.201197 |
| 0.3 | -0.303631 | -0.268947 |
| 0.4 | -0.366226 | -0.310455 |
| 0.5 | -0.398157 | -0.324425 |
| 0.6 | -0.394782 | -0.310455 |
| 0.7 | -0.353214 | -0.268947 |
| 0.8 | -0.272511 | -0.201197 |

| | | |
|---|---|---|
| 0.9 | -0.153749 | -0.109793 |
| 1.0 | 0 | 0 |

Сравнивая значения приближенных функций при $N$=10, $N$=15, получили точность $\varepsilon = 10^{-3}$. Однако, дальнейшее увеличение $N$ приводит к медленному увеличению точности приближения.

## Список литературы


1. Mamatov T. Fractional integration operators in mixed weighted generalized Hölder spaces of function of two variables defined by mixed modulus of continuity// Journal of Mathematical Methods in Engineering, Auctores Publishing – vol.1(1), 2019, P. 1-16
2. Mamatov T, Operators of Volterra convolution type in generalized Hölder spaces, Poincare Journal of Analysis and Applications, vol. 7(2), 2020, p. 275-288
3. Mamatov T and N.Mustafoev, Operators of Volterra convolution type in weighted generalized Hölder space, Poincare Journal of Analysis and Applications, vol. 10(1), 2023, p. 135-154
4. Mamatov T. Mixed Fractional Integration In Mixed Weighted Generalized Hölder Spaces// Case Studies Journal. Vol 7(6), (2018) , p.1-8.
5. Mamatov T. Mixed fractional differentiation operators in Hölder spaces defined by usual Hölder condition// Сборник публикаций научного журнала "Chronos" сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). –М : Научный журнал, "Chronos ", №11 (37), 13 ноября 2019. С. 79 – 82

6. Mamatov T. Zigmund type estimates for mixed fractional integrals of the Volterra convolution type// Сборник публикаций научного журнала "Chronos" сборник со статьями (уровень стандарта, академический уровень). –М : Научный журнал, "Chronos ", №11 (37), 13 ноября 2019. С. 82 – 85.
7. Mamatov T. On isomorphism implemented by mixed fractional integrals in Hölder spaces// International Journal of Development Research Vol. 09, Issue, 05, pp. 27720-27730, May 2019
8. Mamatov T. The Isomorphism Realized By Mixed Fractional Integrals In Hölder Classes// Journal of Computer Science & Computational Mathematics, Vol.10(2), June 2020, P. 35-40
9. Mamatov T. Finite-element method for decisions the fractional differential equation//International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering AIP Conf. Proc. 3244, 020032-1–020032-9, 27.11.2024; https://doi.org/10.1063/5.0242238
10. Mamatov T. Representation of distribution functions by fractional Riemann-Liouville integrals// International Scientific Conference on Modern Problems of Applied Science and Engineering AIP Conf. Proc. 3244, 020002-1–020002-10, 27.11.2024; https://doi.org/10.1063/5.0242239
11. Marinov T.M., Ramirez N., Santamaria F. Fractional Integration toolbox// Fractiomal Calculus and Applied Analysis, 2013. V.16, №3. – P. 670 – 681.
12. Zhu L., Fan Q. Numerical solution of nonlinear fractional-order Volterra integro-differential equations by SCW // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2013. № 18. –P. 1203-1213.