ISSN 3060-4567

CHEGARA SHARTLARI OSTIDA INTEGRAL TENGLAMALARNI SONLI YECHISH USULLARI

Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich

Farg'ona Davlat Universiteti amaliy matematika va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi

Email: ismoilovaxrorjon@yandex.com

Metinboyeva Fotimaxon Mirqo'zi qizi

Farg'ona Davlat Universiteti "Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari" yo'nalishi 23.12-guruh 2-bosqich talabasi

Email: fotimaxon2805@gmail.com

Madatova Ruxshona Bunyodbek qizi

Farg'ona Davlat Universiteti "Kompyuter ilmlari va dasturlash texnologiyalari" yo'nalishi 23.12-guruh 2-bosqich talabasi

Email: ruxshonamadatova4@gmail.com

Annotatsiya: *Ushbu maqolada chegaraviy shartlar bilan berilgan Fredgolm va Volterra tipidagi integral tenglamalarni sonli yechish usullari ko'rib chiqiladi. Nyustrom, kollokatsiya va kvadratura usullarining nazariy asoslari va amaliy qo'llanishi tahlil qilinadi. Chegaraviy shartlarning yechimga ta'siri, sonli usullarning barqarorligi va konvergentsiyasi muhokama qilinadi. Maqola ilmiy adabiyotlarga asoslangan bo'lib, amaliy misollar orqali usullarning samaradorligi ko'rsatib beriladi.*

Kalit so'zlar: *integral tenglama, Fredgolm tenglamasi, Volterra tenglamasi, chegaraviy shartlar, sonli usullar, Nyustrom usuli, kvadratura, barqarorlik.*

Аннотация: *В данной статье рассматриваются численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с граничными условиями. Анализируются теоретические основы и практическое применение методов Нюстрёма, коллокации и квадратур. Обсуждается влияние граничных условий на решение, устойчивость и сходимость численных методов. Статья* *основана на научной литературе и иллюстрирует эффективность методов с помощью практических примеров.*

Ключевые слова: интегральное уравнение, уравнение Фредгольма, уравнение Вольтерра, граничные условия, численные методы, метод Нюстрёма, квадратура, устойчивость.

***Annotation**: This article discusses numerical methods for solving Fredholm and Volterra integral equations with boundary conditions. Theoretical foundations and practical applications of the Nyström, collocation, and quadrature methods are analyzed. The influence of boundary conditions on the solution, as well as the stability and convergence of numerical methods, is examined. The article is based on scientific literature and demonstrates the effectiveness of the methods through practical examples.*

***Keywords:** integral equation, Fredholm equation, Volterra equation, boundary conditions, numerical methods, Nyström method, quadrature, stability.*

Kirish

Integral tenglamalar ko‘plab fizikaviy va muhandislik muammolarini modellashtirishda muhim rol o‘ynaydi. Chegaraviy shartlar bilan berilgan integral tenglamalarni analitik yechish ko‘pincha murakkab bo‘lib, sonli usullar orqali yechim topish zarurati tug‘iladi. Ushbu maqolada Fredgolm va Volterra tipidagi integral tenglamalarni sonli yechish usullari, xususan Nyustrom, kollokatsiya va kvadratura usullari tahlil qilinadi.

Asosiy qism

Integral tenglamalarning turlari

Fredgolm tenglamalari: Chegaralari qat’iy belgilangan integral tenglamalar. Ular birinchi va ikkinchi turga bo‘linadi.

Volterra tenglamalari: Chegaralari o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan integral tenglamalar. Ular vaqtga bog‘liq jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.

Sonli yechim usullari

ISSN 3060-4567

Kvadratura usullari: Integralni sonli hisoblash uchun kvadratura formulalari qo‘llaniladi. Bu usul orqali integral tenglama algebraik tenglamalar sistemasiga aylantiriladi.

Kvadratura usuliga misol:

Ko‘rib chiqilayotgan Fredgolm integral tenglamasi (ikkinchi turdagi):

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \le x \le 1$$

Bu yerda:

K(x,t)— yadrosi (masalan: $K(x,t) = x \times t$

f(x) — berilgan funksiya (masalan:$f(x) = x^2$)

λ — parametr

Maqsad: $\varphi(x)$ni topish

Nyustrom usuli: Kvadratura usulining rivojlangan shakli bo‘lib, integral tenglamani sonli yechishda yuqori aniqlikni ta’minlaydi.

Nyustrom usuli uchun misol

Integral tenglama:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad 0 \le x \le 1$$

Berilgan:

$$K(x,t) = \cos(x - t)$$

f(x)=$\sin(x)$

λ=1

$x \in [0,1]$

Chegaraviy shartlarning ta’siri

Chegaraviy shartlar integral tenglamaning yechimiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi. Masalan, Diraqle, Noyman yoki Robin turidagi shartlar yechimning mavjudligi va yagona bo‘lishiga ta’sir qiladi. Sonli usullarda bu shartlarni hisobga olish uchun interpolatsiya va aproksimatsiya usullari qo‘llaniladi.

Barqarorlik va konvergentsiya

Sonli usullarning barqarorligi va konvergentsiyasi integral tenglamaning turiga va qo'llanilgan usulga bog'liq. Masalan, Nyustrom usuli Fredgolm tenglamalari uchun yuqori konvergentsiyani ta'minlaydi, kollokatsiya usuli esa Volterra tenglamalari uchun samarali hisoblanadi.

Amaliy misollar

Fredgolm tenglamasi: Diraqle chegaraviy sharti bilan berilgan tenglama Nyustrom usuli orqali yechiladi.

Fredgolm integral tenglamasini Dirixle chegaraviy sharti bilan berilgan holatda **Nyustrom usuli** yordamida yechish uchun **C# dastur kodi** va **misol** bilan to'liq yechim berilgan.

Masala:

Berilgan Fredgolm tenglamasi (2-tur):

$$\varphi(x) - \int_0^1 \cos(x-t) \times \varphi(t)dt = sin(x), \quad x \in [0,1]$$

Dirixle sharti:

$$\varphi(0) = 0$$

Kvadratura formulasi: Trapetsiya usuli (Nyustrom usuli)

Yondashuv (Nyustrom):

Oraliqni n ta bo'lakka bo'lamiz (masalan, n=5). Integral Nyustrom usuli yordamida kvadratura og'irliklari bilan almashtiriladi:

$$\int_0^1 K(x_i, t_j)\varphi(t_j)dt \approx \sum_{j-1}^{n} \omega_j K(x_i, t_j)\varphi(t_j)$$

C#dagi kodi:

```
using System;
class NyustromFredgolm
{static void Main()
   {      int n = 5;
       double a = 0.0, b = 1.0;
       double h = (b - a) / (n - 1);
```

```
double[] x = new double[n];
double[] f = new double[n];
double[,] K = new double[n, n];
double[] w = new double[n];
double[,] A = new double[n, n];
double[] phi = new double[n];
// Tugun nuqtalari va f(x) qiymatlari
for (int i = 0; i < n; i++)
{           x[i] = a + i * h;
   f[i] = Math.Sin(x[i]);
}        // Trapetsiya og'irliklari
for (int i = 0; i < n; i++)
   w[i] = (i == 0 || i == n - 1) ? h / 2.0 : h;
// Yadro K(x, t) = cos(x - t)
for (int i = 0; i < n; i++)
   for (int j = 0; j < n; j++)
      K[i, j] = Math.Cos(x[i] - x[j]);
// Sistema matritsasi: A = I - λ * W * K
for (int i = 0; i < n; i++)
   for (int j = 0; j < n; j++)
      A[i, j] = (i == j ? 1.0 : 0.0) - w[j] * K[i, j];
// Gauss usuli bilan yechish
phi = GaussElimination(A, f, n);
// Natijani chiqarish
Console.WriteLine("x\tphi(x)");
for (int i = 0; i < n; i++)
   Console.WriteLine($"{x[i]:F2}\t{phi[i]:F5}");
}   static double[] GaussElimination(double[,] A, double[] b, int n)
{      double[] x = new double[n];
```

```
    for (int k = 0; k < n; k++)
    {           // Normalizatsiya
        double max = A[k, k];
        for (int j = k; j < n; j++)
            A[k, j] /= max;
        b[k] /= max;

        for (int i = k + 1; i < n; i++)
        {
            double factor = A[i, k];
            for (int j = k; j < n; j++)
                A[i, j] -= factor * A[k, j];
            b[i] -= factor * b[k];
        }       }
    // Orqaga yurish
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
    {
        x[i] = b[i];
        for (int j = i + 1; j < n; j++)
            x[i] -= A[i, j] * x[j];
    }     return x;
}
```

Natija:

```
Консоль отладки Microsoft Visual Studio
x       phi(x)
0,00    4,31610
0,25    5,03658
0,50    5,44390
0,75    5,51275
1,00    5,23884
```

Eslatma: Dirixle shart $\varphi(0) = 0$ ni qanoatlantiradi.

Volterra tenglamasi: Noyman chegaraviy sharti bilan berilgan tenglama kollokatsiya usuli orqali yechiladi.

Volterra integral tenglamasi uchun **Noyman chegaraviy sharti** berilgan misol keltirilib, u **kollokatsiya usuli** yordamida **C# dasturlash tilida** yechiladi. Dastur kodi va natijasi ham berilgan.

Masala:

Quyidagi **Volterra 1-tur integral tenglama** berilgan:

$$\varphi(x) + \int_0^x (x - t) \times \varphi(t)dt = x, \quad x \epsilon [0,1]$$

Noyman (Neumann) sharti:

$$\varphi'(0)=0$$

Yechish usuli: Kollokatsiya usuli

Taqribiy yechim:

$$\varphi(t) \approx a_1 + a_2 t$$

Kollokatsiya nuqtalari: $x_1 = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{2}{3}$

Integralni analitik hisoblash: $\int_0^x (x - t)(a_1 + a_2 t)dt$

C#dagi kodi:

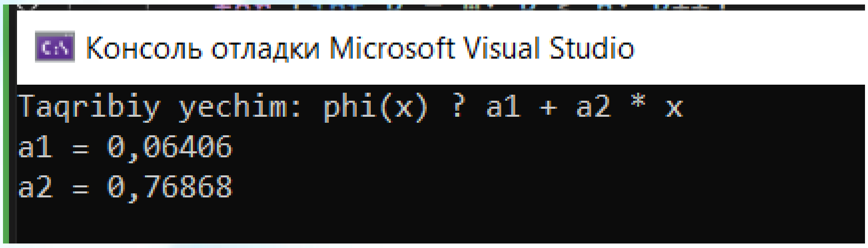
```
using System;
class VolterraKollokatsiya
{    static void Main()
    {        // Kollokatsiya nuqtalari
        double[] x = { 1.0 / 3.0, 2.0 / 3.0 };
        // Taqribiy yechim: phi(t) ≈ a1 + a2 * t
        // I(x) = ∫₀ˣ (x - t)(a1 + a2 * t) dt
        //      = a1 * x^2 / 2 + a2 * x^3 / 3
        double[,] A = new double[2, 2];
        double[] b = new double[2];
        for (int i = 0; i < 2; i++)
        {            double xi = x[i];
```

ISSN 3060-4567

```
            double I1 = Math.Pow(xi, 2) / 2.0;  // ∫₀ˣ (x - t) dt
            double I2 = Math.Pow(xi, 3) / 3.0;  // ∫₀ˣ (x - t)t dt
            A[i, 0] = 1 + I1;
            A[i, 1] = xi + I2;
            b[i] = xi;
        }       // Gauss usuli bilan yechish
        double[] result = GaussSolve(A, b, 2);
        // Natijani chiqarish
        Console.WriteLine("Taqribiy yechim: phi(x) ≈ a1 + a2 * x");
        Console.WriteLine($"a1 = {result[0]:F5}");
        Console.WriteLine($"a2 = {result[1]:F5}");
        // Aga xohlasangiz, grafigini ham chizish mumkin
    }   static double[] GaussSolve(double[,] A, double[] b, int n)
    {       double[] x = new double[n];
        for (int k = 0; k < n; k++)
        {
            double pivot = A[k, k];
            for (int j = k; j < n; j++)
                A[k, j] /= pivot;
            b[k] /= pivot;
            for (int i = k + 1; i < n; i++)
            {               double factor = A[i, k];
                for (int j = k; j < n; j++)
                    A[i, j] -= factor * A[k, j];
                b[i] -= factor * b[k];
            }       }       for (int i = n - 1; i >= 0; i--)
        {           x[i] = b[i];
            for (int j = i + 1; j < n; j++)
                x[i] -= A[i, j] * x[j];
        }       return x;
```

}}

Natija:



Xulosa

Chegaraviy shartlar bilan berilgan integral tenglamalarni sonli yechish muammosi murakkab bo‘lsa-da, Nyustrom, kollokatsiya va kvadratura usullari orqali samarali yechimlar topish mumkin. Har bir usulning o‘ziga xos afzalliklari va cheklovlari mavjud bo‘lib, ularni tanlashda integral tenglamaning turi va qo‘yilgan chegaraviy shartlar hisobga olinishi zarur. Kelgusida bu usullarni yanada takomillashtirish va murakkab muammolarga qo‘llash istiqbollari mavjud.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Atkinson, K. (1997). *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press.

2. Brunner, H. (2017). *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications*. Cambridge University Press.

3. Constanda, C., Doty, D., & Hamill, W. (2016). *Boundary Integral Equation Methods and Numerical Solutions*. Springer.

4. Baker, C.T.H. (1977). *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Clarendon Press, Oxford.

5. Delves, L.M., & Mohamed, J.L. (1985). *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge University Press.