



FUNKSIYA HOSILASI TA'RIFI, UNING GEOMETRIK VA MEXANIK MA'NOLARI

Ergashev Akmal Panjiyevich – O'zbekiston Respublikasi Ichki ishlar
vazirligi Qashqadaryo akademik litseyi matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya: ushbu maqolada akademik litseylarda o'qiydigan o'quvchilarga funksiya hosilasi ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nolari yordamida hosilanini hisoblashni raqamli texnologiyalar yordamida o'qitishni joriy etish orqali ta'lim sifatini oshirish, matematik tasavvur, mantiqiy fikirlash haqida so'z yuritilgan.

Kalit so'zlar: Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar, Fuksiya hosilasi, Hosila ta'rifi, Differensiallashtirish, uning asosiy qoidalari va formulalari, Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari, Hosila hisoblash qoidalari, Ko'paytmaning hosilasi. Yig'indining hosilasi. Bo'linmaning hosilasi.

1. Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar.

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to'g'ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz. Biz bitta masalani olib qaraymiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonuniga ko'ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 va $t_0 + \Delta t$ ($\Delta t \neq 0$) vaqtlar orasidagi bosib o'tgan yo'li

$\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ bo'ladi. Uning shu vaqtdagi o'rtacha tezligi

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \text{ ga teng.}$$



Ma'lumki, Δt

qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha

tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun

nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$

2. Fuksiya hosilasi.

Hosila ta'rif.

Faraz qilaylik biz $y = f(x)$ chiziqning $A(x, f(x))$ nuqtasidagi urinmasini topmoqchimiz. m_T - A nuqtada chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisienti bo'lsin. A nuqtaga o'tkazilgan urinmaning ikkinchi $B(x+h, f(x+h))$ nuqtasini olaylik.

Hamda AB vatarining gradientini m_{AB} deb qaraylik. Yetalicha kichik h uchun

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Agar biz B nuqtani A ga yaqinlashtirsak $B_1, B_2, B_3 \dots$ nuqtalar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu nuqtalarga mos $AB_1, AB_2, AB_3 \dots$ vatarlarni chiziqning A nuqtasidagi urinmasiga qadar yaqinlashtiraylik.

$$f'(x) = \lim_{B_n \rightarrow A} m_{AB_n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (*)^1$$

(*) tenglikka funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deyiladi.

Namunaviy misollar.

1. $f(x) = x^2$ funksiya limitini hisoblang.

Yechish.

Agar $f(x) = x^2$ bo'lsa u holda $f(x+h) = (x+h)^2$ bo'ladi. Bundan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x \end{aligned}$$

Misollar:



Quyidagi funksiyalarning hosilalarini (*) formulasidan foydalanib toping.

1. $f(x) = x^2$

2. $f(x) = 3x^2$

3. $f(x) = \sqrt{x}$

$y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin (a,b) intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy - bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda y funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0=f(x_0)$ ga, argumentning $x_0+\Delta x$ qiymatda $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ ga ega bo'lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (14.1)$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (14.2)$$

Bu – nisbatning $\Delta x \rightarrow 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo'lsa, u berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (14.3)$$

Demak, berilgan $y=f(x)$ funksiyaning argument x bo'yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma'lum qiymatga ega, ya'ni hosila ham x ning funksiyasi bo'lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi

bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. ² $y'; y'_x, \frac{dy}{dx}$

Hosilaning $x=a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y' \Big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.



Funksiya hosilasini hosila ta'rifiga ko'ra hisoblashni ko'ramiz.

3. Differentsiallashtirish, uning asosiy qoidalari va formulalari.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan hosila topish amali shu funktsiyani differentsiallashtirish deyiladi.

Differentsiallashtirishning asosiy qoidalari.

1. O'zgarish miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar $y=c$ bo'lsa ($c=\text{const}$) $y'=0$ bo'ladi.

2. O'zgarish ko'paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin: $y=cu(x)$ bo'lsa $y'=cu'(x)$ bo'ladi.

3. Chekli sondagi differentsiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng:

$$y = U(x) + V(x) + W(x); \quad y' = U'(x) + V'(x) + W'(x)$$

4. Ikkita differentsiallanuvchi funksiyalar ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko'paytmasi hamda birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng:

$$y=uv \text{ bo'lsa } y' = u'v + uv'.$$

5. Ikkita differentsiallanuvchi funksiyalar bo'linmasining hosilasi (kasrda ifodalanib) bo'linuvchi funksiya hosilasini bo'luvchi funksiya bilan ko'paytmasi hamda bo'linuvchi funktsiyani bo'luvchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasining ayirmasini bo'luvchi(maxrajdagi) funksiya kvadratining nisbatiga teng: ³

$$y = \frac{u}{v} \text{ bo'lsa } y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

6. Aytaylik, $y=F(u)$ murakkab funksiya bo'lsin ya'ni $y=F(u)$, $u = \varphi(x)$ yoki $y = F[\varphi(x)]$, u - o'zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. $y=F(u)$ va $u = \varphi(x)$ differentsiallanuvchi funksiyalar bo'lsin.

Murakkab funktsiyaning differentsiallashtirish qoidasini keltirib chiqaramiz.



Teorema: Murakkab $F(u)$ funksiyaning erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasi bu funksiya oraliq argumenti bo'yicha hosilasini oraliq argumentining erkli o'zgaruvchi x bo'yicha hosilasining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$y'_x = F'_u(u) \cdot u'_x(x) \dots \dots (1)$$

Misol: $y = (x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: berilgan funksiyaning murakkab funksiya deb qaraymiz ya'ni $y = u^5$; $u = x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2$ (1) formulaga asosan

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = ((x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^5)' = 5(x^5 + 4x^4 + 3x^2 + 2)^4 \cdot (5x^4 + 16x^3 + 6x)$$

; Differensiallashning asosiy formulalari jadvali:

$$1) y = \text{const}; \quad y' = 0$$

$$2) y = x^\alpha; \quad y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$3) y = \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4) y = \frac{1}{x}; \quad y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5) y = a^x; \quad y' = a^x \ln a$$

$$6) y = e^x; \quad y' = e^x$$

$$7) y = \log_a x; \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$8) y = \ln x; \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$9) y = \sin x; \quad y' = \cos x$$

$$10) y = \cos x; \quad y' = -\sin x$$

$$11) y = \operatorname{tg} x; \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12) y = \operatorname{ctg} x; \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Misolalar.

$$1) f(x) = (x^3 + 4x + 7)^4 \text{ funksiyaning hosilasini toping.}$$

Yechish: Bu yerda $y(u) = u^4$ va $u(x) = x^3 + 4x + 7$ U holda $f(x) = (u^4)' \cdot (x^3 + 4x + 7)' = 4u^3(3x^2 + 4) = 4(x^3 + 4x + 7)^3(3x^2 + 4)$

$$2) (x^2 + x)' = (x^2)' + (x)' = 2x + 1$$

$$3) (2x \sin x)' = (2x)' \sin x + 2x(\sin x)' = 2(x)' \sin x + 2x \cos x = 2 \sin x + 2x \cos x = 2(\sin x + x \cos x)$$

$$4) y = \sin 3x \quad y' = ? \quad y' = (\sin 3x)' = 3 \cos 3x$$

1. Hosilaning geometrik va mexanik ma'nosi.

Bizga berilgan $u=f(x)$ funksiya x nuqta va uning atrofida aniqlangan bo'lsin. Argument x ning biror qiymatida $u=f(x)$ funksiya aniq qiymatga ega bo'ladi, biz uni $M_0(x, u)$ deb belgilaylik. Argumentga Δx orttirma beramiz va natija funksiyaning $u+\Delta u=f(x+\Delta x)$ orttirilgan qiymati to'g'ri keladi. Bu nuqtani $M_1(x+\Delta x, u+\Delta u)$ deb belgilaymiz va M_0 kesuvchi o'tkazib uning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchagini φ bilan belgilaymiz.

Endi $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni qaraymiz. Rasmdan ko'rinadiki, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi$ ga teng.

Agar $\Delta x \rightarrow 0$ ga, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'yicha harakatlanib, M_0 nuqtaga yaqinlasha boradi. M_0M_1 kesuvchi ham $\Delta x \rightarrow 0$ da o'z holatini o'zgartira boradi, xususan φ burchak ham o'zgaradi va natijada φ burchak α burchakka intiladi. M_0M_1 kesuvchi esa M_0 nuqtadan o'tuvchi urinma holatiga intiladi. Urinmaning burchak koeffitsienti quyidagicha topiladi

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Demak, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$, ya'ni, argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x, u)$ nuqtasidagi urinmaning OX o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng.

1. Geometrik ma'nosi.

Faraz qilaylik bizga $y = f(x)$ funksiya grafiga va unga tegishli bo'lgan $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqta berilgan bo'lsin.

$f'(x_0)$ - f funksiyaning grafigiga $P_0(x_0, f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffisientiga teng. Bundan foydalanib biz urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Faraz qilaylik urinma tenglamasi

$$y = kx + l \quad \text{ko'rinishida} \quad \text{bo'lsin.} \quad \text{Bu} \quad \text{yerda} \quad k = f'(x_0)$$

$P_0(x_0, f(x_0))$ nuqta bu to'g'ri chiziqqa tegishli ekanidan $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + l$



$$l = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Bundan

$$y = t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \in R$$

2. Fizik ma'nosi

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (**)$$

(**) formula, $s = s(t)$ qonun bo'yicha harakatlanayotgan M jismning t_0 vaqtdagi oniy tezligini ifodalaydi.

3. Hosilaning geometrik va fizik ma'nolari.

Hosilaning fizik ma'nosi. Hosila tushunchasiga olib keladigan ikkinchi masalada harakat qonuni $s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan moddiy nuqtaning t vaqt momentidagi oniy tezligi $v_{oniy} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ekanligini ko'rgan edik. Bundan hosilaning fizik (mexanik) ma'nosi kelib chiqadi.

$s=s(t)$ funksiya bilan tavsiflanadigan to'g'ri chiziqli harakatda t vaqt momentidagi harakat tezligining son qiymati hosilaga teng: $v_{oniy} = s'(t)$.

Hosilaning mexanik ma'nosini qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin: yo'ldan vaqt bo'yicha olingan hosila tezlikka teng.

Hosila tushunchasi nafaqat to'g'ri chiziqli harakatning oniy tezligini, balki boshqa jarayonlarning ham oniy tezligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, faraz qilaylik $y=Q(T)$ jismni T temperaturaga qadar qizdirish uchun uzatilayotgan issiqlik miqdorining o'zgarishini tavsiflovchi funksiya bo'lsin. U holda jismning issiqlik sig'imi issiqlik miqdoridan temperatura bo'yicha olingan hosilaga teng bo'ladi:

$$C = \frac{dQ}{dT} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta T}.$$

Umuman olganda, hosilani $f(x)$ funksiya bilan tavsiflanadigan jarayon oniy tezligining *matematik modeli* deb aytish mumkin.

4. Hosila hisoblash qoidalari

Quyida keltirilgan teoremlar isbotida hosila topish algoritmidan, limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremlardan foydalanamiz.



Shuningdek $\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$ va $\Delta v = v(x + \Delta x) - v(x)$ ekanligini hisobga olgan holda, $u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta u$, $v(x + \Delta x) = v(x) + \Delta v$ tengliklardan foydalanamiz.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar (a, b) intervalda aniqlangan bo'lsin.

Yig'indining hosilasi.

1-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning $x \in (a, b)$ nuqtada hosilalari mavjud bo'lsa, u holda $f(x) = u(x) + v(x)$ funksiyaning ham x nuqtada hosilasi mavjud va

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ko'paytmaning hosilasi.

2-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ko'paytmasi ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bo'linmaning hosilasi.

3-teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega, $v(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda ularning $f(x) = u(x)/v(x)$ bo'linmasi $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega va

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

formula o'rinli bo'ladi.

Shunday qilib biz ushbu paragrafda hosilani hisoblashning quyidagi qoidalarini keltirib chiqardik:

1. Ikkita, umuman chekli sondagi funksiyalar yig'indisining hosilasi hosilalar yig'indisiga teng.
2. O'zgaras ko'paytuvchini hosila belgisi oldiga chiqarish mumkin.
3. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar ko'paytmasining hosilasi $u'v + uv'$ ga teng.
4. Ikkita $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar bo'linmasining hosilasi $(u'v - uv')/v^2$ ga teng.



1- va 2-teorema natijalaridan foydalangan holda quyidagi qoidaning ham o‘rinli ekanligini ko‘rish qiyin emas:

5. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar chiziqli kombinatsiyasining hosilasi hosilalarning aynan shunday chiziqli kombinatsiyasiga teng, ya’ni agar $f(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\dots+c_nu_n(x)$ bo‘lsa, u holda $f'(x)=c_1u_1'(x)+c_2u_2'(x)+\dots+c_nu_n'(x)$.

Bu qoidaning isbotini o‘quvchilarga havola qilamiz.

Eslatma. Yuqoridagi teoremlar funksiyalar yig‘indisi, ko‘paytmasi, bo‘linmasining hosilaga ega bo‘lishining yetarli shartlarini ifodalaydi. Demak, ikki funksiya yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatidan iborat bo‘lgan funksiyaning hosilaga ega bo‘lishidan bu funksiyalarning har biri hosilaga ega bo‘lishi har doim kelib chiqavermaydi. Masalan, $u(x)=|x|$, $v(x)=|x|$ deb, ularning ko‘paytmasini tuzsak, $y=x^2$ ko‘rinishdagi funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiyaning $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ nuqtada, xususan, $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud. Ammo, ma’lumki $y=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emas.

ADABIYOTLAR:

1. *Ш.А. Алимов и др.* Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10–11 класса. Учебник для базового и профильного образования, Москва, “Просвещение”, 2016.
2. *А.Н. Колмогоров и др.* Алгебра и начала анализа. Учебное пособие для 10–11 классов. Москва, “Просвещение”, 2018.
3. Алгебра. Учебное пособие для 9–10 классов. Под ред. Н.Я. Виленкина. Москва, “Просвещение”, 2004.
4. *Adilbek Zaitov, Baxtiyor Abdiyev, Kalmurza Sagidullayev* 10-sinf uchun darslik “Algebra va analiz asosolari”, O‘z. Res. XTV yangi nashri Toshkent, 2022.
5. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismoilov.* 10-sinf uchun “Algebra va analiz asosolari” dan testlar, G‘.G‘ulom NMIU, Toshkent, 2005.
6. *T.A. Azlarov, X. Mansurov.* Matematik analiz asoslari. 3-nashr, “Universitet”, Toshkent, 2005.
7. *M.A. Mirzaahmedov, Sh.N. Ismoilov, A.Q. Amanov* 11-sinf uchun “Algebra va analiz asosolari” dan sinif darsligi, Toshkent, 2018.