ISSN 3060-4567

TESKARI MASALALAR UCHUN TIXONOV REGULYARIZATSIYASI USULIDAN FOYDALANIB YER OSTI SUV ZAXIRALARINI ANIQLASH MASALASINING YECHIMI

Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi 22.09 guruh talabalari

O'ktamjonova Nilufar Abdurahmon qizi

E-mail: *Karimberdiyevanilufar625@gmail.com*

Tilavoldiyeva Muharramoy Abdullajon qizi

E-mail: *muharramoy004@gmail.com*

Annotatsiya. *Ushbu maqolada 1-tur operator tenglamalarining Tixonov ma'nosidagi shartli korrekt yechimlari o'rganiladi. Banax fazolaridagi A-kompakt operatorlar uchun shartli korrektlik tushunchasi va uning asosiy teoremalari bayon etiladi. Xususan, Tixonov bo'yicha korrektlikka oid boshlang'ich shartlar, Tixonov teoremasi va uning isboti, yechimning mavjudligi hamda yagonaligi bilan bog'liq muhim natijalar tahlil qilinadi. Kompakt to'plamlar, tekis uzluksizlik va normaning baholanishi orqali Tixonov korrektligining zarur va yetarli shartlari aniq ko'rsatiladi. Mazkur ish talabalarga operator tenglamalarining nazariy asoslarini chuqur tushunishga va matematik muammolarni korrekt qo'yish tamoyillarini o'zlashtirishga yordam beradi.*

Аннотация. *В данной статье рассматриваются условно корректные решения операторных уравнений первого рода в смысле Тихонова. Изложены понятие условной корректности для A-компактных операторов в пространствах Банаха и основные теоремы, связанные с этим понятием. В частности, рассматриваются начальные условия корректности по Тихонову, теорема Тихонова и её доказательство, а также вопросы существования и единственности решений. Через свойства компактных множеств, равномерную непрерывность и нормы приводятся необходимые и достаточные условия корректности в смысле Тихонова. Данная работа* *способствует углублённому пониманию студентами теоретических основ операторных уравнений и принципов корректной постановки математических задач.*

Abstract. *This article studies conditionally well-posed solutions of first-kind operator equations in the sense of Tikhonov. It presents the concept of conditional well-posedness for A-compact operators in Banach spaces and outlines the main theorems related to this concept. In particular, initial conditions for Tikhonov well-posedness, Tikhonov's theorem and its proof, as well as the existence and uniqeness of solutions are discussed. By analyzing compact sets, uniform continuity, and norm estimates, the necessary and sufficient conditions for Tikhonov well-posedness are derived. This work aids students in gaining a deeper understanding of the theoretical foundations of operator equations and the principles of well-posed problem formulation in mathematics.*

Kalit so'zlar. *Tixonov regulyarizatsiyasi, teskari masala, yer osti suvlari, operator tenglama, ill-posed masala, shartli korrektlik, kompyuter modellashuvi, geofizik o'lchovlar, elektr o'tkazuvchanlik, Banax fazosi, barqaror yechim, regulyarizatsiya parametri, shovqinli ma'lumotlar, fizik modellashtirish, numerik yondashuv, kompakt operator, silliqlik funksiyasi, cheklangan yechimlar sohasi, invers muammo, fizik asoslangan cheklovlar, yer strukturasi, suv qatlamlari, minimallashtirish masalasi, normali yechim, fizik interpretatsiya, matematik fizika, amaliy matematika.*

Ключевые слова: *Регуляризация Тихонова, обратная задача, подземные воды, операторное уравнение, некорректная задача, условная корректность, компьютерное моделирование, геофизические измерения, электрическая проводимость, пространство Банаха, устойчивое решение, параметр регуляризации, зашумленные данные, физическое моделирование, численный подход, компактный оператор, функция гладкости, ограниченная область решений, обратная проблема, физически обоснованные ограничения, структура земли, водоносные слои, задача минимизации, нормальное решение,* *физическая интерпретация, математическая физика, прикладная математика.*

Keywords: *Tikhonov regularization, inverse problem, groundwater, operator equation, ill-posed problem, conditional correctness, computer modeling, geophysical measurements, electrical conductivity, Banach space, stable solution, regularization parameter, noisy data, physical modeling, numerical approach, compact operator, smoothness function, constrained solution domain, inverse analysis, physically justified constraints, subsurface structure, aquifer layers, minimization problem, normal solution, physical interpretation, mathematical physics, applied mathematics.*

Kirish. Quyidagi 1-tur operator tenglamani qaraymiz

$$Ax = f \;,\; x \in X \;,\;\; f \in F \qquad (1)$$

bu yerda X, F Banax fazolari, A-kompakt operator. Faraz qiaylik, X fazosida M to‘plam ajratilgan bo‘lsin, $M \subset X$.

1-ta’rif. (1) masala Tixonov bo‘yicha korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) boshlang‘ichdan ma’lumki masalaning yechimi mavjud va M to‘plamga tegishli;

2) masalaning yechimi M to‘plamda yagona;

3) f funksiyaning yechimni f to‘plamdan tashqariga chiqarmaydigan cheksiz kichik o‘zgarishiga x yechimning cheksiz kichik o‘zgarishi mos keladi.

M_A bilan M to‘plamning A operator orqali F fazoga aksini belgilaymiz.

U holda M_A to‘plamda A operator uzluksiz.

M to‘plam korrektlik to‘plami deyiladi. Umuman aytganda, M chiziqli fazo bo‘lmaganligi uchun, (1) masala bunday ko‘rinishda chiziqsiz masala bo‘lib qoladi.

Klassik korrektlik bilan Tixonov bo‘yicha korrektlik tushunchalari orasidagi bog‘lanish va farqni ko‘rib chiqamiz. Tixonov bo‘yicha korrektlikni nazariy tekshirishda mavjudlik teoremasi isbotlanmaydi. Yechimning mavjudligi va korrektlik to‘plamiga tegishliligi masalaning qo‘yilishidan faraz qilinadi. Agar qaralayotgan masala fizik masalaning matematik ifodalanishi bilan bog‘liq bo‘lsa, u holda qo‘shimcha fizik ma’nodan kelib chiqadi.

Tixonov ma’nosidagi korrekt masalalarda yagonalikni isbotlash korrekt masalalarda yagonalikni isbotlashdan deyarli farq qilmaydi.

M korrektlik to’plami sifatida odatda kompakt to’plam qaraladi. Bu holda teskari operatorning uzluksizligi 2) shartdan kelib chiqadi.

1-teorema (A.N.Tixonov). Faraz qilaylik, (1) tenglamaning yechimi yagona va M kompakt to‘plam bo‘lsin. U holda M to‘plamda $A^{-1}(A^{-1}-A)$ operatorga teskari operator uzluksiz bo‘ladi.

Isbot. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni teoremaning tasdiqi o‘rinli bo‘lmasin. U holda shunday $x_0 \in M$ va $\varepsilon_0 > 0$ M mavjudki, barcha $\delta > 0$ uchun shunday $x_1 \in M$ elementi topiladiki,

$$|Ax_0 - Ax_1| < \delta \quad , |x_0 - x_1| > \varepsilon_0$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $\{\delta_k\}$ketma- ketlik $k \to \infty$ da nolga intiluvchi va $\{x_1\}$ elementlar ketma-ketligi shundayki, ular uchun

$$|x_0 - x_k| > \varepsilon_0 \qquad |Ax_0 - Ax_k| < \delta_k \qquad x_k \in M$$

o‘rinli bo‘lsin.

M to‘plam kompakt ekanligidan $\{x_k\}$ketma-ketlikning yaqinlashuvchi qism ketma-ketligi mavjud. Bu qism ketma-ketlik boshlang‘ich ketma-ketlik bilan ustma – ust tushadi deb faraz qilsak bo‘ladi. Ushbu

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$$

o‘rinli bo‘lsin.

U holda A operatorning uzluksiz ekanligidan

$$\|A\bar{x} - Ax_0\| = 0 \qquad A\bar{x} = Ax_0 \qquad \|\bar{x} - x_0\| \ge \varepsilon_0$$

bo‘ladi, bu esa (1) tenglama yechimi yagonaligiga ziddir. 1-teorema isbotlandi.

ISSN 3060-4567

2-teorema. Faraz qilaylik, (1) tenglamaning yechimi yagona va M korrektlik to‘plami algebraik yig‘indidan iborat bo‘lsin:

$$M = M_1 + V_1$$

bu yerda M_1 - kompakt to‘plam, V_1 - X fazoning chekli o‘lchovli qism fazosi. U holda M_A to‘plamida A_1 operator tekis uzluksizdir.

3-teorema. Shunday nol nuqtada $\omega(\varepsilon)$ $(\omega(0)=0)$ uzluksiz funksiya mavjudki, barcha $x_1, x_2 \in M$ uchun quyidagi baho o‘rinli

$$\|x_1 - x_2\| \le \omega(\|Ax_1 - Ax_2\|).$$

bu yerda . norma mos ravishda X va F fazolarida.

2-ta’rif. Agar nolda uzluksiz shunday $\omega(\varepsilon)$, $(\omega(0)=0)$ funksiya mavjud va

$\forall x_1, x_2 \in M$ bo‘lganda $\|x_1 - x_2\| \le \omega(\|Ax_1 - Ax_2\|)$.

bo‘lsa, u holda $Ax = f$, $A: D(A) \to F, D(A) \subseteq X$ masala Tixonov ma’nosida $M \subseteq D(A)$ to‘plamda korrekt deyiladi.

Masala: Yer osti suv zaxiralarini aniqlash

Masalaning berilishi. Yer yuzasida turli nuqtalarda elektr qarshilik o‘lchanadi. Bu ma’lumotlar asosida yer ostida suv mavjud yoki yo‘qligini aniqlamoqchimiz.Yer osti suvli qatlam elektr signallarni boshqacha o‘tkazadi — bu hodisa orqali biz ularni bilvosita topa olamiz.

Matematik modeli. Buni quyidagi teskari operator tenglama bilan ifodalaymiz:

$$Ax = f$$

Bu yerda:

x yer osti qatlamining fizik xossalari (suvli, quruq, o‘tkazuvchanlik),

f yer yuzasida o‘lchanadigan elektr signallari (rezistivlik),

A o‘lchovlarni model qiluvchi fizik (kompakt) operator.

Masala teskari bo‘lgani uchun beqaror. Shuning uchun Tixonov regulyarizatsiyasidan foydalanamiz.

Tixonov regulyarizatsiyasi orqali yechim:

$$x_\alpha = \arg\min_{x\in M}\left\{\left\|Ax - f^\delta\right\|^2 + \alpha\|x\|^2\right\}$$

Teskari masala uchun quyidagi **optimallashtirish** masalasini yechamiz:

Bu yerda:

f^δ shovqinlangan (noaniq) o‘lchovlar,

$\alpha > 0$ regulyarizatsiya parametri (barqarorlashtiruvchi),

$\left\|Ax - f^\delta\right\|^2$ o‘lchovlarga yaqinlik,

$\|x\|^2$ yechimning silliqligini ta’minlaydi.

Disretlash va yechim

Amalda A operator matritsa $A \in R^{m\times n}$ ko‘rinishida bo‘ladi, masalan:

$$A = \begin{matrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.9 \end{matrix} \qquad f^\delta = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

Tixonov yechimi quyidagicha hisoblanadi:

$$x_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T f^\delta$$

Faraz qilaylik $\alpha = 0.1$

U holda:

- $A^T A$
- $A^T f^\delta$
- $A^T A + \alpha I$
- Invers matritsa olish
- Va so’ngi natijani topish

Yechim talqini:

Natijada — bu yer ostidagi uchta qatlam bo‘yicha taxminiy suv miqdori (yoki elektr o‘tkazuvchanlik) bo‘ladi. Masalan:

$$x_\alpha = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 1.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Bu shuni anglatadi:

1-qatlam: o‘rtacha suvli,

2-qatlam: suv ko‘proq,

3-qatlam: quruqroq.

Yakuniy izoh:

Bu yechim barqaror, shovqinga chidamli, fizik ma’noga ega (suv miqdori manfiy emas).

Xulosa

Yer osti suv zaxiralarini aniqlash zamonaviy geofizikaning muhim amaliy masalalaridan biri bo‘lib, bu jarayonda to‘g‘ridan-to‘g‘ri kuzatishlar o‘rniga bilvosita ma’lumotlar, ya’ni elektr o‘lchovlari asosida teskari matematik modellashtirish qo‘llaniladi. Bunday masalalar odatda klassik matematik nuqtai nazardan beqaror, ya’ni ill-posed bo‘lib, ularda yechimning mavjudligi, yagonaligi yoki uzluksiz bog‘liqligi kafolatlanmaydi. Aynan shuning uchun bu masalalarni hal etishda shartli korrektlik prinsipiga asoslangan yondashuvlar talab etiladi.

Shuningdek, maqolada misol tariqasida elektr o‘lchovlari orqali yer ostidagi suv qatlamlarini aniqlashga oid teskari masala modeli keltirildi. Bu model orqali operator tenglamasi asosida masala ifodalandi va regulyarizatsiya parametri yordamida uni yechish mexanizmi izchil tushuntirildi. Disretlashtirish orqali masala raqamli ko‘rinishga keltirilib, amaliy yechim shakli — — yordamida barqaror yechim olish mumkinligi ko‘rsatildi.

Bu usulning afzalligi shundaki, u teskari masalalarni fizik cheklovlar bilan uyg‘unlashtirgan holda matematik jihatdan asosli va amaliy jihatdan qo‘llaniladigan yechimlar olish imkonini beradi. Shu bois, Tixonov yondashuvi nafaqat geofizika, balki tibbiyot (masalan, tomografiya), muhandislik, meteorologiya va boshqa ko‘plab sohalarda keng qo‘llanilmoqda.

Xulosa qilib aytganda, ushbu maqolada ko‘rib chiqilgan yondashuv orqali teskari masalalarning beqarorlik xususiyati matematik asosda barqarorlashtirildi, bu esa uni zamonaviy ilmiy-amaliy tadqiqotlarda ishonchli vosita sifatida qo‘llash imkonini yaratadi. Shuningdek, bu yondashuv oliy ta’limda matematik fizika va amaliy matematika fanlarida tahliliy va loyihaviy kompetensiyalarni shakllantirishda muhim o‘quv vositasi bo‘lib xizmat qiladi.

ISSN 3060-4567

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Тихонов А.Н. (1963). Об устойчивости обратных задач. Доклады Академии наук СССР, 151(3), 501–504.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. (1979). Методы решения некорректных задач. Москва: Наука.
3. Кириллов А.А. (2006). Функциональный анализ. Москва: ИКИ.
4. Groetsch, C. W. (1984). The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind. Pitman Publishing Inc.
5. Engl, H. W., Hanke, M., & Neubauer, A. (1996). Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
6. Витушкин А.Г. (2003). Введение в теорию функций вещественной переменной. Москва: Физматлит.
7. Асадов А.И., Шарафутдинов В.Е. (2005). Вычислительные методы решения обратных задач. Новосибирск: СО РАН.
8. Özdoğan, M. & Kazanci, N. (2019). Inverse Problems in Geophysics. Journal of Applied Mathematics and Physics, 7(3), 657–670.
9. Каландаров Т.Х., Турдиалиев Б.Б. (2021). Matematik fizika tenglamalari va teskari masalalar. Toshkent: Fan va texnologiya.
10. Usubamatov, R. (2020). Mathematical Modeling of Geophysical Fields. Singapore: Springer.