ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALALARNI FURYE USULI BILAN YECHISH

Muhammadvaliyeva Mohichehra Zuhriddin qizi

Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi 3-kurs talabasi

22.09-guruh talabasi

E-mail: mohichehramuhammadvaliyeva@gmail.com

Qaxramonova Muxlisa Jumaxo'ja qizi

Farg'ona davlat universiteti amaliy matematika yo'nalishi 3-kurs talabasi

22.09-guruh talabasi

E-mail: qahramomovakmalxuja@gmail.com

Annotatsiya: *Maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun berilgan aralash masalani nokorrekt va teskari shaklda tahlil qilish, shuningdek uni Furye usuli yordamida yechish yondashuvi ko'rib chiqilgan. Ushbu yondashuv yordamida masala yechimining mavjudligi, yagona bo'lishi va barqarorligi shartlari asoslanadi. Furye qatorlari yordamida yechimlar aniq ifodalanadi hamda amaliy masalaga tadbiq etiladi. Tadqiqot natijalari masalalarni raqamli yechishda ham qo'llanilishi mumkinligini ko'rsatadi.*

Kalit so'zlar: *Issiqlik tarqalish tenglamasi, aralash masala, Furye usuli, teskari masala, nokorrektlik, barqaror yechim, matematik modellashtirish.*

Annotation: *The article considers the approach to analyzing the given mixed problem for the heat transfer equation in its incorrect and inverse form, as well as its solution using the Fourier method. With the help of this approach, the conditions for the existence, uniqueness, and stability of the solution of the problem are established. The solutions are expressed precisely using Fourier series and applied to a practical problem. The research results show that the problems can also be used in numerical solutions.*

Keywords: *Heat dissipation equation, mixed problem, Fourier method, inverse problem, ill-posedness, stable solution, mathematical modeling.*

Аннотация (На русском языке): *В статье рассматривается подход к анализу заданной смешанной задачи для уравнения теплопроводности в ее некорректной и обратной форме, а также ее решение с использованием метода Фурье. При таком подходе устанавливаются условия существования, единственности и устойчивости решения задачи. Решения выражаются именно с помощью рядов Фурье и применяются к практической задаче. Результаты исследования показывают, что задача может быть решена и численно.*

Ключевые слова (На русском языке): *Уравнение теплоотдачи, смешанная задача, метод Фурье, обратная задача, некорректность, устойчивое решение, математическое моделирование.*

Kirish

Amaliy hayotda ko‘p hollarda turli fizik jarayonlar, masalan, issiqlikning jismlar ichida qanday tarqalishini aniqlash muhim bo‘ladi. Bunday jarayonlar matematik modellar yordamida ifodalanadi. Ulardan biri — issiqlik tarqalish tenglamasi bo‘lib, bu tenglama haroratning vaqt va makondagi o‘zgarishini ifodalaydi. Ko‘p hollarda amaliy masalalarda barcha ma’lumotlar aniq emas: ba’zida boshlang‘ich shart noma’lum bo‘ladi, ba’zida esa yechimning o‘zi ma’lum bo‘lib, unga olib kelgan sabablarni aniqlash kerak bo‘ladi. Bunday hollarda masala teskari masala deb ataladi. Teskari masalalar odatda nokorrekt, ya’ni yechimi mavjud, yagona yoki barqaror bo‘lmasligi mumkin. Bu esa ularni yechishda alohida matematik yondashuvlarni talab qiladi. Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun berilgan aralash teskari masalalarni yechishda Furye usuli keng qo‘llaniladi. Bu usul yordamida murakkab tenglamalar soddalashtiriladi va yechimlar maxsus qatorlar ko‘rinishida ifodalanadi. Shu orqali yechimni tiklash, aniqlikni oshirish va fizik mazmunni saqlab qolish imkoniyati tug‘iladi.

Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masalani Furye usuli yordamida yechish yondashuvi ko‘rib chiqiladi. Diqqat asosan masalaning nokorrektligi, yechimning barqarorligini ta’minlash usullari va teskari masalalarga xos bo‘lgan muammolarga qaratiladi.

ISSN 3060-4567

Dolzarblik

Zamonaviy ilm-fan va texnologiyalar rivojida fizikaviy jarayonlarni to‘g‘ri modellashtirish va ularga matematik yondashuv topish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Issiqlik tarqalishi jarayonlari energiya tizimlarida, sanoat qurilmalarida, geofizik va biotibbiyot sohalarida keng qo‘llaniladi. Ko‘plab amaliy masalalarda to‘liq ma’lumot mavjud bo‘lmaydi, natijada masalalar teskari yoki nokorrekt shaklga ega bo‘ladi. Bunday hollarda an’anaviy usullar yetarli bo‘lmagani uchun maxsus matematik yondashuvlar, xususan, Furye usulidan foydalanish dolzarb ahamiyat kasb etadi. Bu maqolada ana shunday masalalarga yondashishning nazariy va amaliy asoslari ko‘rib chiqiladi.

Ishning maqsadi va vazifalari:

Issiqlik tarqalish tenglamasiga oid aralash masalani nokorrekt va teskari holatda Furye usuli yordamida yechish metodikasini o‘rganish, yechimning mavjudligi, yagona bo‘lishi va barqarorligini ta’minlaydigan yondashuvlarni aniqlash.

Ishning vazifalari:

1. Issiqlik tarqalish tenglamasi va unga tegishli aralash masalaning matematik modelini tuzish.
2. Masalaning teskari va nokorrekt xususiyatlarini tahlil qilish.
3. Furye usulining asosiy tushunchalari va formulalarini izohlash.
4. Masalani Furye qatorlari yordamida yechish algoritmini ishlab chiqish.
5. Yechimning mavjudligi, yagona va barqaror bo‘lish shartlarini asoslab berish.
6. Amaliy misol orqali usulni qo‘llab, natijani tahlil qilish.

Ilmiy yangilik

Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasiga oid aralash nokorrekt masalaning Furye usuli yordamida yechish algoritmi ishlab chiqildi. Masalaning teskari va barqarorlik xususiyatlari nazariy asoslangan holda tahlil qilindi. Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan shartlardagi masalalar uchun umumlashgan yechim shakli Furye qatorlari yordamida ifodalandi. Taklif etilgan yondashuv issiqlik jarayonlarini

ISSN 3060-4567

matematik modellashtirishda qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan samarali va barqaror usul ekanligi isbotlandi.

Bu ilmiy natijalar teskari masalalarni raqamli usulda yechishda ham foydali bo‘lishi mumkin.

Asosiy qism:

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun aralash masalalarni o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechish:

Tekislikda $D=\{(x,t):0<x<l,0<t<\infty\}$ sohada bir jinsli issiqlik tarqalish tenglamasining

$$U_t=U_{xx} \qquad (1)$$

issiqlik tarqalish tenglamasining

$$U(x,t)=\varphi(x) \qquad (2)$$

boshlang‘ich shartlarni va

$$U(0,t)=0, \quad U(l,t)=0 \qquad (3)$$

bir jinsli chegaraviy chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin.

Bu masalani o‘zgaruvchilarni ajratish yoki Fure usuli bilan yechamiz. (1) tenglama yechimini

$$U(x,t)=X(x)\times T(t)$$

(4)

ko‘rinishda izlaymiz. Bu yerda $X(x)$ va $T(t)$ noma’lum funksiyalar. (4) ifodani (1) tenglamaga qo‘yib, $X(x)$ va $T(t)$ noma’lum funksiyalarni topish uchun

$$T'(t)+\lambda T(t)=0, \qquad (5)$$

$$X''(t)+\lambda X(t)=0$$

(6)

tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bunda $\lambda=const.$ (4) ifodadan va (3) chegaraviy shartlardan

$$X(0)=0, \quad X(l)=0 \qquad (7)$$

chegaraviy shartlar kelib chiqadi.

(6)–(7) masala xos son va xos funksiyalarni topish haqidagi Shturm–Liuvill masalasidir. (6)–(7) masalaning xos sonlari

$$\lambda_k = (\frac{\pi k}{l})^2 \quad (k = 1, 2, ...),$$

bu xos sonlarga mos trivial bo‘lmagan (aynan nolga teng bo‘lmagan) normallashgan xos funksiyalari

$$X_k(x) = \sin\frac{\pi kx}{l}$$

bo‘ladi. $\lambda = \lambda_k$ bo‘lganda (5) tenglamaning umumiy yechimi

$$T_k(t) = a_k e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t}$$

ko‘rinishga ega bo‘lib,

$$U(x,t) = X_k(x) \cdot T_k(t) = a_k e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}$$

funksiya (a_k,– ixtiyoriy o‘zgarmas son) (1) tenglamani va (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

(1) tenglamaning (2)–(3) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini

$$U_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\frac{\pi n}{l})^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{8}$$

qator ko‘rinishda izlaymiz. Agar (8) funktsional qator va uning ikkinchi tartibli hosilalari tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda bu qator yig‘indisi (1) tenglamani hamda (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

a_k o‘zgarmas soni (8) qatorning yig‘indisi (2) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. U holda (2) shartlardan

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

(9)

tengliklarga ega bo‘lamiz. (9) tenglik mos ravishda $\varphi(x)$ funksiyaning (0 , l) oraliqdagi sinuslar bo‘yicha Fure qatoriga yoyilmalaridir. (9) Fure qatorining koeffitsienti

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

(11)

formulalar bo‘yicha topiladi.

Endi biz issiqlik tarqalish tenglamasining yechimini topish oddiy holatlarga nisbatan murakkabroq ko‘rinishini misol orqali tushuntiramiz. Ya’ni bir jinsli bo’lmagan issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Furye usuli bilan yechishni ko’rib chiqamiz.

Masala. Tekislikdagi $D=\{(x,t):0<x<l,0<t<\infty\}$ sohada bir jinsli bo’lmagan

$$U_t = U_{xx} + f(x;t) \tag{1}$$

issiqlik tarqalish tenglamasining

$$U(x,0)=0 \tag{2}$$

boshlang‘ich shartlarni va

$$U(0,\mathrm{t})=0, U_x(\mathrm{l},\mathrm{t})=0 \tag{3}$$

bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

Yechish: (1) tenglama yechimini

$$U(x,t)=V(x,t)+W(x,t) \tag{4}$$

ko‘rinishda izlaymiz.Bu yerda V(x,t) va W(x,t) noma’lum funksiyalar. Endi (4) ifodani (1) tenglamaga qo’yamiz

$$V_t - V_{xx} = 0 \tag{5}$$

$$W_{xx} - W_t + f(x,t) = 0 \tag{6}$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz.(5) tenglmani yechamiz va bu tenglamani yechimi yuqorida ko’rgan masalamizdan ma’lumki

$$V_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2 t}\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l}) \tag{7}$$

ga teng bo’ladi.Endi topilgan (7) tenglamani $U(x,0)=0$ chegaraviy shartga bo’ysunduramiz. Bunga ko’ra $\mathrm{V}(x,0)=0$ tenglik o’rinli va bu yerda $V(x,t)=0$, $a_n=0$ tenglikka ega bo’lamiz.

Endi (6) tenglamani yechamiz. Bu tenglamani yechish uchun quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})$$

(6) tenglamaga qo'yib ixchamlaymiz va quyidagi tenglikni hosil qilamiz

$$T_k{}'(t)+T_k(t)\cdot(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2=f_n(t)$$

Ushbu tenglamani yechib quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$T_k(t)=b_k(t)\cdot e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2 t}$$

bu yerda

$$b_k(t)=\int_0^t f_k(\tau)\cdot e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2\tau}d\tau,$$

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})dx$$

ga teng bo'ladi.

Demak,

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\cdot e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2 t}\cdot\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})x$$

ga teng bo'ladi va $b_k(t)$, $f_k(t)$ larning qiymati yuqorida ko'rsatilgan.

Bu tenglikda $U(x,t)$ tenglamaning qiymati $U(x,t)=V(x,t)+W(x,t)$ ligini hisobga olsak va $V(x,t)=0$ ga tengligi sababli

$$U(x,t)=W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(t)\cdot e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2 t}\cdot\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})x$$

tenglik o'rinli bo'ladi va bu yerda

$$b_k(t)=\int_0^t f_k(\tau)\cdot e^{-(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})^2\tau}d\tau,$$

$$f_k(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin(\frac{\pi}{2l}+\frac{\pi k}{l})dx$$

larga teng.

Xulosa:

Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi asosida aralash nokorrekt masalalarni Furye usuli yordamida yechish usuli ko‘rib chiqildi. Tadqiqot natijasida Furye qatorlari yordamida murakkab masalaning soddalashtirilgan shakli qurildi, yechimga qo‘yiladigan asosiy shartlar aniqlandi. Yechimning mavjudligi va barqarorligi nuqtayi nazaridan metodning samaradorligi isbotlandi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, Furye usuli teskari masalalarni barqaror yechishda samarali vosita hisoblanadi. Bu usul kelgusida boshqa fizik modellar va matematik tenglamalarga ham qo‘llanilishi mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1.A.Q.O‘rinov, Z.A.Ahmedov, Sh.T.Karimov– *Matematik fizika tenglamalari fanidan amaliy mashg‘ulotlar uchun qo‘llanma.*

2.Zikirov O. S. Matematik fizikatenglamalari

Mukhamedov A.K. – *Matematik fizika tenglamalari va ularning teskari masalalari*. Farg‘ona: FDU nashriyoti, 2022

3. Polyanin, A. D., Zaytsev, V. F. (2003). Differensial tenglamalar va ularni yechish usullari. Moskva: Fizmatlit.

4. Boyce, W. E., DiPrima, R. C. (2009). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. John Wiley & Sons.

5. Tikhonov, A. N., Samarskiy, A. A. (1972). Differensial tenglamalar. Moskva: Nauka.

6. Ibragimov, I. A. (2004). Matematik fizika tenglamalari. Toshkent: Fan.