



РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО АЛГОРИТМА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УОЛША

Киличов Ж.Р., Гайратов З.К., Жумабоев Т.А

Самаркандский филиал Ташкентского Университета информационных технологий имени Мухаммада аль-Хоразми

Рассмотрение алгоритмов реализации преобразования Уолша преследует цель проведения моделирования процесса преобразования цифровых сигналов с помощью средств вычислительной техники. Для этого необходимо определенное программно-математическое обеспечение. Сейчас подобных средств существует достаточно много, нужно только выбрать какой-нибудь между ними. Для рассматриваемых задач хорошо подходит пакет MathCad, поэтому дальнейшая разработка ориентирована на применение именно этого макета.

Основание ортогонального преобразования, в том числе преобразование Уолша, составляет расчет скалярного произведения сигнальной последовательности с соответствующей базисной функцией. В случае дискретного преобразования расчет коэффициентов разложения производится благодаря матричному произведению. Базовое выражение ортогонального преобразования цифровых информационных последовательностей в терминах матричной алгебры задается выражениями:

$$X = H \cdot x; \quad (1)$$

$$x = H^{-1} \cdot X, \quad (2)$$

где x – дискретная цифровая последовательность (вектор) отсчетов обрабатываемого сигнала; X – дискретная цифровая последовательность (вектор) коэффициентов ортогонального разложения; H – матрица прямого ортогонального разложения; H^{-1} – матрица обратного ортогонального разложения. Выражение (1) выражает прямое преобразование, а выражение (2) выражает обратное преобразование. [1, 2]

При преобразовании Уолша в выражениях (1) и (2) применяется матрица преобразования Уолша. Учитывая способы упорядочения функций Уолша: естественное, по части и диадическое, нужно применить матрицы Адамара, Адамара-Уолша и Адамара-Пели.

Таким образом, самый простой алгоритм преобразования Уолша заключается в реализации матричного перемножения средствами компьютерной техники и математического моделирования. Соответственно, требуются средства генерирования указанных матриц.

Генерированию трех основных матриц преобразования позволят следующие макросы.

Макрос для генерирования матрицы Адамара n -го порядка.

n – порядок матрицы Адамара.

```
genHadMatr(n) :=  $\left\| \begin{array}{l} \text{if } n \neq 0 \\ \quad \left\| \begin{array}{l} H \leftarrow \text{genHadMatr}(n-1) \\ H \leftarrow \text{stack}(\text{augment}(H, H), \text{augment}(H, -H)) \end{array} \right\| \\ \text{else} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} H \leftarrow 1 \\ H \end{array} \right\| \end{array} \right\|$ 
```

Макрос для генерирования матрицы Адамара-Уолша n -го порядка.

n – порядок матрицы Адамара-Уолша.

```
genWalMmatr(n) :=  $\left\| \begin{array}{l} M \leftarrow 2^n - 1 \\ r(U, V, n) \leftarrow \left\| \begin{array}{l} u \leftarrow \text{toBina}(U, n) \\ v \leftarrow \text{toBina}(V, n) \\ x \leftarrow u_{n-1} \cdot v_0 \\ \text{for } i \in 0..n-2 \\ \quad \left\| x \leftarrow x + (u_{n-1-i} + u_{n-i-2}) \cdot v_{i+1} \right\| \\ x \end{array} \right\| \\ \text{for } U \in 0..M \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } V \in 0..M \\ \quad \left\| HW_{U,V} \leftarrow (-1)^{r(U,V,n)} \right\| \end{array} \right\| \\ HW \end{array} \right\|$ 
```

Макрос для генерирования матрицы Адамара-Пели n -го порядка.

n – порядок матрицы Адамара-Пели.

```
genPalMmatr(n) := || M ← 2n - 1 ||  
|| r(U, V, n) ← || u ← toBina(U, n) ||  
|| v ← toBina(V, n) ||  
|| x ← 0 ||  
|| for i ∈ 0 .. n - 1 ||  
|| || x ← x + un-1-i · vi ||  
|| x ||  
|| for U ∈ 0 .. M ||  
|| || for V ∈ 0 .. M ||  
|| || HPU, V ← (-1)r(U, V, n) ||  
|| HP ||
```

В приведенных макросах используется макрос превращения натурального числа из десятичной формы представления в двоичную форму. Текст кода этого макроса приведен ниже.

Макрос превращает натуральное число в двоичную форму. На выходе формируется вектор двоичных цифр указанной длины. Младший разряд расположен в элементе с нулевым индексом.

x – входной вектор векторов натуральных чисел;

M – указанная длина выходного двоичного вектора

Из анализа выражения следует, что спектр сигнала при ФИМ содержит постоянную составляющую, составляющую с частотой модулирующего сигнала Ω , основную гармонику с частотой $\omega_1(k=1)$ и кратные ей высшие гармоники с частотами $k\omega_1$, вокруг которых размещаются полосы боковых гармоник с частотами $k\omega_1 \pm n\Omega$.



```
toBina(x, M) := || if x ≥ 1 ||  
|| z ← x || | | | |
|| N ← floor(log(x, 2)) ||  
|| for i ∈ N..0 ||  
|| || yi ← floor(z / 2i) ||  
|| || z ← mod(z, 2i) ||  
|| else ||  
|| || y0 ← x ||  
|| K ← M - N - 1 ||  
|| for i ∈ 1..K ||  
|| || if K ≥ 1 ||  
|| || || y ← stack(y, 0) ||  
|| || y ||
```

Вызвав приведенные макросы, можно получить подходящие матрицы Адамара.

```
n := 3  
n = 3  
M := 2n  
M = 8
```

```
H := genHadMatr(n)
```

```
HW := genWalMmatr(n)
```

```
HP := genPalMmatr(n)
```

Задать порядок матрицы Адамара^{n := 3}

Задан порядок матрицы Адамара $n = 3$

Определить размер матрицы Адамара $m := 2^n$

Определен размер матрицы Адамара $M = 8$

Сгенерировать матрицу Адамара $H := \text{genHadMatr}(n)$

Сгенерировать матрицу Адамара-Уолша $H_w := \text{genWalMmatr}(n)$

Сгенерировать матрицу Адамара-Пели $H_p := \text{genPalMmatr}(n)$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Сгенерированная матрица Адамара

Сгенерированная

матрица

Адамара-Уолша

$$HW = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Сгенерированная

матрица

Адамара-Пели

$$HP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Надо построить графики трех вариантов составления функций Уолша. Для этого требуются еще два макроса, которые приведены ниже.

Макрос формирует сигнал в виде биполярной импульсной последовательности в соответствии с входным вектором x .

A – амплитуда импульсов;

τ – длительность импульсов;

x – вектор двоичной последовательности импульсного сигнала;
 x – вектор двоичной последовательности импульсного сигнала;
 t – переменная времени.

Макрос формирует сигнал в виде биполярной функции Уолша в соответствии с матрицей составления H .

A – амплитуда импульсов;
 τ – длительность импульсов;
 H – матрица упорядочения функций Уолша;
 k – индекс функции Уолша;
 t – переменная времени.

$$\text{walshFun}(A, \tau, k, H, t) := \text{pulseRow}(A, \tau, H^{(k)}, t) - 3 \cdot k \cdot A$$

Построим графики непрерывных функций Уолша.

Задать амплитуду импульсов в сигнале функций Уолша $A := 1$

Задать длительность импульсов в сигнале функций Уолша $\tau := 1 \cdot 10^{-3}$

$H := H$

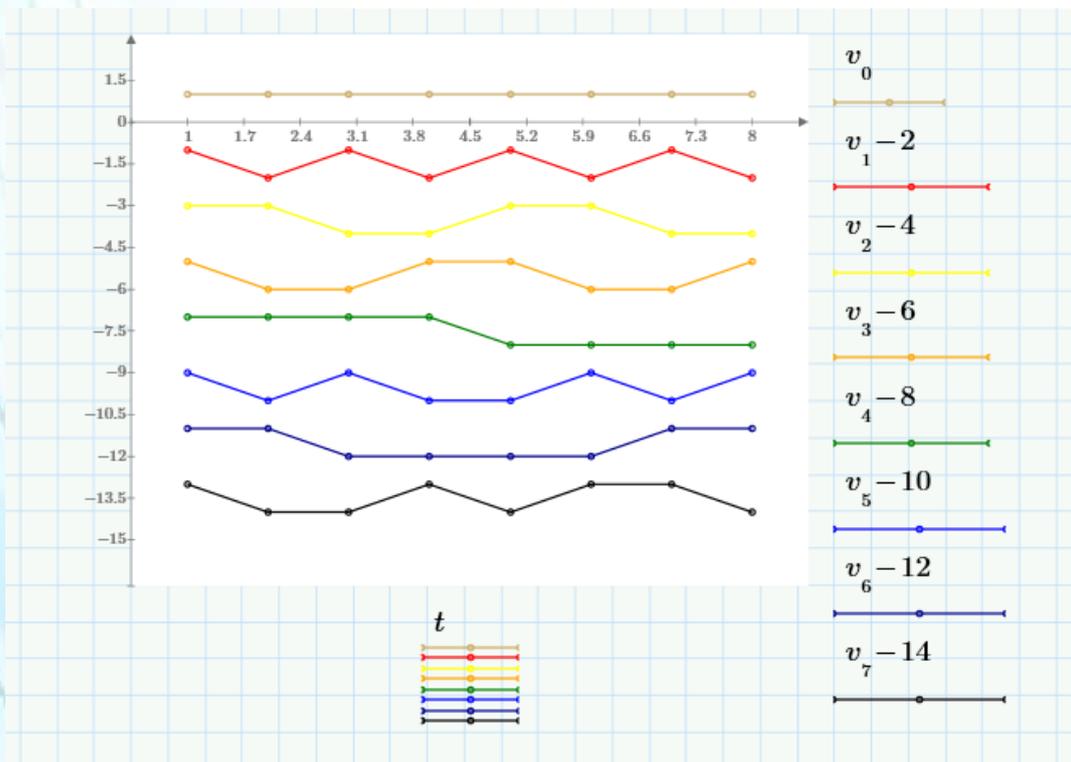


Рисунок 3.1 – Графики функций Уолша упорядоченных по Адамару



Для проведения моделирования CDMA-системы в среде MathCad были построены графики, отражающие процесс формирования кодированных сигналов на основе функций Уолша. На изображении представлены 8 сигналов, обозначенных как w_0, w_1, \dots, w_7 , каждый из которых сдвинут по вертикали для удобства визуального восприятия.

Каждая линия на графике представляет собой результирующий кодированный сигнал соответствующего пользователя, полученный путём умножения его исходной последовательности данных на соответствующую строку матрицы Уолша. На горизонтальной оси указаны моменты времени t , на вертикальной — амплитудные значения результирующих сигналов.

Цветовая дифференциация облегчает сопоставление сигналов с их индексами.

Реализованный алгоритм позволяет реализовывать как прямое так и обратное преобразование Уолша цифровых последовательностей информационных сигналов. Но этот алгоритм является самым плохим с точки зрения количества арифметических операций расчета на компьютере, на что тратится наибольшее количество времени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

3. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. [Текст]. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
4. Никитин Г.И. Применение функций Уолша в сотовых системах связи с кодовым разделением каналов. [Текст]. – Санкт-Петербург: СПбГУАП, 2003. – 86 с.
5. Цифровые и аналоговые системы передачи данных. В.И. Иванов, В.Н. Гордиенко, Г.Н. Попов. [Текст]. – М.: Радио и связь, 1996. 369 с.
6. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. [Текст]. - М.: Радио и связь, 1986. - 512 с.
7. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. [Текст]. – М.: Высш. шк., 1988 – 448 с.