ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN TESKARI KOSHI MASALASI

Farg'ona Davlat Universiteti Amaliy matematika yo'nalishi 22.10 guruh talabalari

Tursunaliyeva Odinaxon Erkinboy qizi

E-mail: tursunaliyevaodinaxon69@gmail.com

Astonaqulova Kibriyoxon Baxriddin qizi

E-mail: kibriyoxonastonaqulova@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolamizda issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi ko'rib chiqdik. Ushbu masalaning matematik mohiyati, yechimning mavjudligi, yagona bo'lishi va turg`unligi muammolari tahlil qildik. Teskari Koshi masalasining nokorrektligi va uni yechishda qo'llaniladigan muntazamlashtirish usullari (regulyarizatsiya) nazariy va amaliy misollar bilan ko'rsatib beramiz.

Abstract: In this article, we consider the inverse Cauchy problem for the heat transfer equation. We analyze the mathematical essence of this problem, the existence, uniqueness, and stability of the solution. We show the ill-posedness of the inverse Cauchy problem and the regularization methods used to solve it with theoretical and practical examples.

Аннотация: В статье рассматривается обратная задача Коши для уравнения теплопроводности. Анализируется математическая сущность этой задачи, существование, единственность и устойчивость решения. На теоретических и практических примерах показывается некорректность обратной задачи Коши и методы регуляризации, используемые для ее решения.

Kalit so'zlar: Teskari masala, issiqlik tenglamasi, Koshi masalasi, nokorrektlik, muntazamlashtirish, Tixonov usuli, turg`unlik.

Keywords: Inverse problem, heat equation, Cauchy problem, irregularity, regularization, Tikhonov method, stability.

Ключевые слова: Обратная задача, уравнение теплопроводности, задача Коши, нерегулярность, регуляризация, метод Тихонова, устойчивость.

Kirish

Issiqlik tarqalish tenglamasi matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biridir. Ko'pchilik amaliy masalalarda, ayniqsa teskari masalalarda, bizga natija (masalan, oxirgi vaqtdagi harorat) ma'lum bo'lib, unga sabab bo'lgan boshlang'ich holatni aniqlash talab qilinadi. Bu esa teskari Koshi masalasi deb yuritiladi. Bunday masalalar odatda nokorrekt bo'lib, ularning yechimlari mavjud bo'lmasligi yoki kuchli turg`un bo'lishi mumkin. Ushbu maqolada bunday masalaning matematik mohiyati va yechimini turg`unlashtirish usullari ko‘rib chiqiladi.

Asosiy qism

Issiqlik tenglamasi

Bir o‘lchamli issiqlik tenglamasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad o < x < L, \qquad o < t < T$$

Bu yerda, u(x,t)-harorat funksiyasi, a^2 -issiqlik tarqalish koeffitsienti .

Teskari Koshi masalasi

Ma’lum bo‘lgan u(x,T) = φ(x) funksiyasidan foydalanib, boshlang‘ich holat u(x,0) ni aniqlash. Bu masala bevosita teskari masala hisoblanadi, chunki yechim vaqtga nisbatan “orqaga” hisoblanadi.

Nokorrektlik va turg`unlik muammosi

Adamar ta’rifiga ko‘ra, masala to‘g‘ri qo‘yilgan bo‘lishi uchun:

Yechim mavjud bo‘lishi, yechim yagona bo‘lishi,yechim boshlang‘ich ma’lumotlarga uzluksiz bog‘liq bo‘lishi zarur.

Teskari Koshi masalasi odatda Adamarning 3-shartini (turg`unlik) buzadi, ya’ni kichik xatoliklar yechimda katta o‘zgarishlarga olib keladi.

Muntazamlashtirish (regulyarizatsiya) usullari

Nokorrekt masalalarni yechishda muntazamlashtirish usullari qo‘llaniladi. Eng mashhuri – Tixonov regulyarizatsiyasi:

$$min_u\{\left|\left|Au - \varphi\right|\right|^2 + \alpha||Lu||^2$$

Bu yerda A – issiqlik operatori, φ – kuzatuv, L-muntazamlashtiruvchi operator (odatda identik), α – regulyarizatsiya parametri.

Amaliy misol

Berilgan:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u(0,t) = u(x,1) = 0\,, u(x,1) = \sin(\pi x)$$

Yechim:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2(1-t)} \sin(n\pi x)$$

Berilgan yakuniy holatda:

$$u(x,1) = \sin(\pi x) \rightarrow A_1 = 1$$

Demak,

$$u(x,0) = e^{-\pi^2} \sin(\pi x) \approx 0.0432 * \sin(\pi x)$$

Agar xatolik bo‘lsa, masalan:

$$u(x,0) \approx (1 + 0.01)\, e^{-\pi^2} \sin(\pi x) \approx 0.0436 * \sin(\pi x)$$

Bu misol turg`unlik yoqligini korsatadi: kichik xatoliklar u(x,0) da katta tasir qiladi .Shuning uchun Tixonov usuli kabi regulyarizatsiya metodlari zarur bo`ladi.

Amaliy misol .

Masala: Quyidagi issiqlik tenglamasi berilgan:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{t}^2}, \qquad o < x < 1, \qquad o < t \leq 1,$$

Chegaraviy shartlar:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

Kuzatuv (yakuniy vaqt kesimi):

$$u(x,1) = \varphi(x) = \sin(\pi x)$$

Talab: $u(x,0)$ ni toping – ya'ni, boshlang'ich harorat taqsimotini aniqlanadi.

1-usul.Oldinga yechim shakli

Issiqlik tenglamasining sinfiy (klassik) yechimi:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2(1-t)} \sin(n\pi x)$$

Bu yerda A_n– boshlang'ich haroratni trigonometrik (Furye) qatorga yoyish koeffitsientlari.

2-usul. Teskari masala – yechim toppish

Bizga yakuniy holat ma'lum:

$$u(x,1) = \sin(\pi x)$$

U holda, yuqoridagi umumiy yechim formulasi orqali shuni topamizki:

$$\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2(1-t)} \sin(n\pi x)$$

Bu qatorda faqat bitta had bor (chunki chap tomonda faqat bor):

Demak:

$$A_1 e^{-\pi^2} = 1 \rightarrow A_1 = e^{\pi^2}$$

Bu juda katta son!

$$e^{\pi^2} \approx e^{9.8696} \approx 19319$$

Shu sababli boshlang'ich yechim:

$$u(x,0) = A_1 \sin(\pi x) = e^{\pi^2} \sin(\pi x) \approx 19319 * \sin(\pi x)$$

Masalan:

$$u(x,1) = \sin(\pi x)$$

Boshlang'ich yechim:

$$u(x,0) \approx 19319 * \sin(\pi x)$$

Bu degani, agar yakuniy holatga 1% xatolik kirsa, boshlang'ich yechimga bu 193 barobar ta'sir qiladi! Ya'ni:

Yakuniy holatdagi xatolik:$\varepsilon = 0.01$

Bu esa teskari Koshi masalaning juda beturg`un, ya'ni nokorrekt ekanini yaqqol ko'rsatadi. Issiqlik tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi klassik holatda ishlanmaydi. Yechim mavjud, lekin u kuchli beturg`un – eng kichik xatolik yechimni buzadi. Bunday holatda muntazamlashtirish metodlari (masalan, Tixonov usuli) ishlatiladi.Yuqoridagi misol teskari masalalarning mohiyatini tushunishga yordam beradi va amaliy holatlarda ehtiyotkorlik bilan ishlash zarurligini koʻrsatadi.

Xulosa

Issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari Koshi masalasi nazariy va amaliy jihatdan dolzarb masalalardan biridir. Ushbu masalaning asosiy qiyinligi — uning nokorrektligidadir. Yechim kichik xatoliklarga sezgir boʻlib, ularni bartaraf etish uchun muntazamlashtirish usullaridan foydalanish zarur. Maqolada keltirilgan misol ushbu yondashuvlarning muhimligini amaliy jihatdan koʻrsatib beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Metody resheniya nekorrektnykh zadach. — M.: Nauka, 1979.

2. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. Ill-posed Problems of Mathematical Physics and Analysis. — AMS, 1986.

3. Isakov V. Inverse Problems for Partial Differential Equations. — Springer, 2006.

4. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. — De Gruyter, 2011.

5. Özarslan M.A., Yamamoto M. Inverse Heat Source Problems. — In: Inverse Problems and Related Topics, Springer, 2019.