NOKORREKT VA TESKARI MASALALAR FANIDAN ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASI UCHUN TESKARI MASALALAR

Farg'ona Davlat Universiteti 3-kurs talabalari,
Shuhratjonova Gulchiroy Shuhratjon qizi
gulchiroy128@gmail.com
Ne'matjonova Navro'za Qahramonjon qizi
navrozajorayeva03@icloud.com

Annotatsiya: Biror nuqtada haroratni oʻlchash orqali dastlabki harorat taqsimotini aniqlash masalasini qaraymiz. Ushbu maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun ikkinchi chegaraviy masala misolida bu teskari masalaning qoʻyilishini koʻrib chiqamiz.

Kalit soʻzlar: issiqlik tarqalish tenglamasi, toʻgʻri masala, teskari masala, boshlangʻich shart, chegaraviy shart.

Annotation: We consider the problem of determining the initial temperature distribution by measuring the temperature at a certain point. In this article, we examine the formulation of this inverse problem using the second boundary value problem for the heat conduction equation.

Keywords: heat conduction equation, direct problem, inverse problem, initial condition, boundary condition.

Аннотация: Рассматривается задача определения начального распределения температуры на основе измерения температуры в одной точке. В данной статье изложена постановка этой обратной задачи на примере второго краевого условия для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, прямая задача, обратная задача, начальное условие, краевое условие.

Kirish. Issiqlik tarqalish jarayonlari koʻplab texnik va tabiiy tizimlarda muhim rol oʻynaydi. Ularni matematik modellashtirishda issiqlik tarqalish tenglamasi asosiy vosita hisoblanadi. Mazkur tenglama asosida qurilgan toʻgʻri masalalarda boshlangʻich va chegaraviy shartlar ma'lum boʻlib, yechim topilishi talab qilinadi. Biroq koʻplab real holatlarda bu shartlar toʻliq ma'lum boʻlmaydi, aksincha, haroratning ma'lum vaqt oraligʻida yoki fazodagi qiymatlari kuzatiladi. Bunday vaziyatlarda teskari masalalarni hal qilish zarur boʻladi.Teskari masalalarda yechimni aniqlash jarayoni odatda ill-posed (yaxshi qoʻyilmagan) boʻlib, kichik xatoliklar katta ogʻishlarga olib kelishi mumkin. Shu sababli, bunday masalalarni oʻrganish nafaqat matematik, balki fizik, texnik va hisoblash nuqtayi nazaridan ham dolzarb hisoblanadi. Ayniqsa, issiqlik manbaini aniqlash, boshlang‘ich haroratni tiklash yoki o‘lchovlar orqali tizim holatini qayta tiklash kabi masalalar zamonaviy ilm-fan va sanoatda katta amaliy ahamiyatga ega.

To‘g‘ri masala. Ushbu

$$u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x < l, 0 < t < T, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, 0 < t < T, \qquad (2)$$

$$\mathrm{u}(l,t) = g(t) \qquad (3)$$

$$u(\mathrm{x},0) = \varphi(\mathrm{x}), 0 \le \mathrm{x} \le \mathrm{l}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ funksiyani toping

Teskari masala. $\mathrm{t} \in [t_0, t_1], t_0 > 0$ bo‘lganda $g(\mathrm{t}) = \mathrm{u}(\mathrm{x}_0, \mathrm{t})$ funksiya berilgan, bu yerda $\mathrm{x}_0 - [0,l]$ kesmadagi biror fiksirlangan nuqta, $u(\mathrm{x},\mathrm{t})$ esa (1)-(3) masalaning yechimi. $[0,l]$ kesmada $\varphi(\mathrm{x})$ funksiyani topish talab qilinadi.

Bu teskari masalaning fizik talqini quyidagicha. Muayyan vaqt oralig‘ida harorat sterjenning belgilangan nuqtasida o‘lchanadi va bu o‘lchovlardan dastlabki harorat taqsimotini aniqlash kerak.

(1)-(3) masalaning yechimi o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan olinishi mumkin va

$$u(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right) \mathrm{d}\xi \exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2 t\right\} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x\right)$$

ko‘rinishga ega. Bu tenglikka $x = x_0$ qo‘yib, $\varphi(\mathrm{x})$ funksiya uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right) \mathrm{d}\xi \exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2 t\right\} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l} x\right) = g(t) \qquad (4)$$

tenglama hosil bo‘ladi, bu yerda $\mathrm{t} \in [t_0, t_1]$.

O‘lchov nuqtasi x_0 segment oxirida bo‘lgan taqdirda (1) tenglama yechimining yagonaligini tekshiramiz.

Teorema. Agar $x_0 = 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaning yechimi $L_2[0,l]$ fazoda yagona bo‘ladi.

Isbot. (1) tenglamaning chiziqliligidan kelib chiqadiki, $L_2[0,l]$ fazoda yechimning yagonaligini isbotlash uchun $g(t) = \frac{2}{l} \exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2 z\right\}$.(4) tenglikka $g(t) = \frac{2}{l} \exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2 z\right\}$.va $x_0 = \frac{l}{2}, k \in (2n+1)(-1)^n$ qiymatlarni qo‘ysak, $t \in [t_0, t_1]$ da quyidagini olamiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2t\right\}=\frac{2}{l}\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{l}\right]^2 a^2z\right\}.$$
(5)

Komplks yarim tekislikda $\operatorname{Re}z\geq\alpha$

$$\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}2\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2z\right\}. \qquad (6)$$

kompleks o‘zgaruvchili funksiyasni ko‘rib chiqamiz, bu yerda $a\in(0,t_0)$. Demak, $\operatorname{Re}z\geq\alpha$ bo‘lganda

$$\left|\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2z\right\}\right|\leq\left|\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2t\right\}\right|,$$

u holda bu yarim tekislikda (6) ning o‘ng tomonidagi qator tekis yaqinlashadi. Bu qatorning har bir hadi uchun analitik funksiya $\operatorname{Re}z\geq\alpha$ ekanligini hisobga olib, Veyershtras teoremasini qo‘llagan holda, $\Phi(z)=0$ funksiya $\operatorname{Re}z\geq\alpha$ uchun analitik ekanligini bilib olamiz.

(5) dan $\Phi(z)$ funksiyaning analitiklik sohasida yotuvchi, haqiqiy o‘qdagi

$[t_0,t]$ kesmada $\Phi(z)=0$ ekanligi kelib chiqadi, u holda teoremadagi yagonalik xulosasi analitik funksiyalar uchun $\Phi(z)=0$, barcha z uchun, $\operatorname{Re}z\geq\alpha$ ekanligidan kelib chiqadi.

Shunday qilib, (5) tenglik barcha $t\geq t_0$ haqiqiy sonlar uchun bajariladi.Bu tenglikdan $t\to\infty$ bo‘lgandagi limitga o‘tsak, biz ketma-ket

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi=0 \qquad (7)$$

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi=1$$

tenglikni olamiz va quyidagi natijaga erishamiz. Bu tenlikdn kelib chiqadiki $L_2[0,l]$ $\cos\left(\frac{(2n-1)}{l}x\right)$, n=1,2,.. funksiyalar sistemasi to‘laligi sababli (7) tengliklardan φ(x) = 0 ekanligi kelib chiqadi. 1-teorema isbotlandi.

Sterjen ichidagi x∈(0, l) haroratni o‘lchashda teskari masala yechimining yagonaligi x_0 kuzatish nuqtasini tanlashga bog‘liqligini ko‘rsatamiz.

Haqiqatan ham, faraz qilaylik x_0 =l/2, va $\varphi(x)=\cos\left(\frac{(2n-1)}{l}x\right)$, bo‘lsin. U holda (1)-(3) masala yechimi

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi=0$$

$$\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)d\xi=1$$

$$\varphi(\xi)=\frac{2}{l}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)$$

$\varphi(x)$ ni topib, $u(x,t)$ funksiyaga qo‘yamiz va natijaga erishamiz.

$$u(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)\mathrm{d}\,\xi\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2t\right\}\sin\left(\frac{((2n-1)\pi}{2l}x\right)$$

$$\int_0^l\frac{2}{l}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\xi\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l}\right)\mathrm{d}\,\xi=\begin{Bmatrix}1, n=k\\ 0, n\neq k\end{Bmatrix}$$

$$u(x,t)=\frac{4}{l^2}\exp\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2 a^2t\right\}\sin\frac{3\pi k}{l}x$$

$$\varphi(x)=\frac{4}{l^2}\sin\frac{3\pi k}{l}x$$

Bu holda ham teorema isbotiga o‘xshash mulohaza yuritib, (4) tenglamaning yechimi yagona ekanligini bilib olamiz.

Ko‘rib chiqilayotgan teskari masalani 1-turdagi Fredgolm integral tenglamasiga keltirish mumkin. Haqiqatdan ham, (4) tenglamaning chap tomonidagi integrallash va yig‘indiga olish tartibini almashtirib,

$$G\varphi=\int_0^l G(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi=g(t), t_0\le t\le t_1 \qquad (8)$$

1-turdagi Fredgolm tenglamasini olamiz, bu yerda yadro

$$G(t,\xi)=\frac{1}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{l}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{l}\xi\right)ext\left\{-\left[\frac{(2n-1)\pi}{l}\right]^2a^2t\right\}\cos\left(\frac{(2n-1)}{l}x_0\right),$$

$\mathrm{t}_0\le \mathrm{t}\le \mathrm{t}_1, 0\le\xi\le 1$ to‘rtburchakda uzluksizdir. Binobarin, $L[0,l]$, dan $L\ [t_o,t_1]$ ga amal qiluvchi deb qaralayotgan integral operator G tekis uzluksizdir. Shunday qilib, bu juft fazolarda (8) tenglamani yechish masalasi nokorrekt qo‘yilgan.

Xulosa. Maqolada issiqlik tarqalish tenglamasi uchun teskari masala o‘rganildi. O‘zgaruvchilarni ajratish usuli yordamida yechim ifodalandi va o‘lchov nuqtasi segment oxirida joylashgan hol uchun yechimning yagonaligi isbotlandi. Kompleks funksiyalar va Veyershtras teoremasi asosida funksiyaning analitiklik xossalari tahlil qilindi. Olingan natijalar teskari masalalarning nazariy asoslarini chuqurlashtirishga xizmat qiladi.Ushbu maqola “Nokorrekt va teskari masalalar” fanidan mustaqil ta’lim sifatida yozildi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. K.S.Fayazov, I.O.Xajiyev Nokorrekt va teskari masalalar(o‘quv qo‘llanma)
2. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964. P. 35-92.
3. Ames K.A., Straughan B. Non-Standard and Improperly Posed Problems.Academic Press, New York, 1997. 303 p.
4. Fayazov K.S. Hisoblash matematikasi, matematik fizika va analizning nokorrekt masalalarini yechish usullari. Toshkent, O‘zMU, 2001. 100 b.
5. Fayazov K.S. Khajiev I.O. The ill-posed boundary value problem for a high-order differential equation with the degeneration line. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2(39), 2022. P. 122-129