SHARTLI KORREKT MASALA TA'RIFI. TIXONOV TEOREMASI.

Abdullayeva Dilfuzaxon Dilshod qizi
Farg'ona Davlat Unversiteti 3-kurs talabasi
dilfuzaabdullayeva.13@gmail.com
Muhammadjonova Dildora Umidjon qizi
Farg'ona Davlat Unversiteti 3-kurs talabasi
kgxkgxkgxmguzix@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada korrekt masalalarning matematik mohiyati,korrektlik shartlar o'rganilgan. Asosiy e'tibor Tixonov regulyarizatsiyasi usuliga qaratilib, Tixonov teoremasining nazariy asoslari va barqaror yechimga erishish shartlari bayon qilindi. Teoremaning rasmiy bayoni, shartli korrektlik tushunchasi va regulyarizatsiya parametrining tanlovi amaliy misollar bilan yoritildi. Bu yondashuv teskari masalalar va illyustrativ fizik modellarni yechishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ishda A.N. Tixonov va V.Ya. Arseninning ilmiy ishlari asosiy manba sifatida foydalanilgan.

Kalit so'zlar: Shartli korrekt, Tixonov, regulyrizatsiya, Hilbert fazo, konvergent, kvadrat matritsa, chiziqli operator,teskari masala.

Annotation: This article studies the mathematical essence of correct problems, correctness conditions. The main attention is paid to the method of Tikhonov regularization, the theoretical foundations of Tikhonov's theorem and the conditions for achieving a stable solution are described. The formal statement of the theorem, the concept of conditional correctness and the choice of the regularization parameter are illustrated with practical examples. This approach is of great importance in solving inverse problems and illustrative physical models. The scientific works of A.N. Tikhonov and V.Ya. Arsenin were used as the main source in the work.

Keywords: Conditionally correct, Tikhonov, regularization, Hilbert space, convergent, square matrix, linear operator, inverse problem.

Аннотация: В данной статье изучается математическая сущность корректных задач, условия корректности. Основное внимание уделено методу регуляризации Тихонова, описаны теоретические основы теоремы Тихонова и условия достижения устойчивого решения. Формальная формулировка теоремы, понятие условной корректности и выбор параметра регуляризации проиллюстрированы практическими примерами. Данный подход имеет большое значение при решении обратных задач и иллюстративных физических моделей. В качестве основного источника в работе использованы научные труды А.Н. Тихонова и В.Я. Арсенина.

Ключевые слова: Условно корректно, Тихонов, регуляризация,

гильбертово пространство, конвергентный, квадратная матрица, линейный оператор, обратная задача.

Amaliy matematikada koʻplab muammolar, xususan fizik, texnik va iqtisodiy tizimlarni modellashtirishda uchraydigan masalalar oʻz ifodasini matematik tenglamalar yoki operator tenglamalari koʻrinishida topadi. Bunday masalalarni yechishda yechimning mavjudligi, yagona boʻlishi va barqarorligi muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu uchta talabni qanoatlantiradigan masalalar korrekt masalalar deb ataladi.Biroq amaliyotda koʻp hollarda bu shartlar buziladi. Masalan, yechim mavjud boʻlmasligi, bir nechta yechimlar mavjud boʻlishi yoki kirishdagi kichik xatoliklar yechimni keskin oʻzgartirib yuborishi mumkin.

Shartli korrekt masalalar nazariyasining asoslari akademik A. N. Tixonov tomonidan qoʻyildi. Keyinchalik bu nazariya doirasida bir nechta ilmiy maktablar shakllandi: xususan, A. N. Tixonov boshchilik qilgan Moskva maktabi, M. M. Lavrentyev rahbarligidagi Novosibirsk maktabi va V. K. Ivanov boshchiligidagi Yekaterinburg maktabi. Shartli korrekt masalalar nazariyasi, shuningdek, Sankt-Peterburg, Kiyev, Samarqand, Toshkent, Qiziloʻrda, Olmaota va boshqa shaharlar, hamda AQSh, Fransiya, Italiya, Germaniya kabi mamlakatlarda ham rivoj topdi.

Shartli korrekt masala – bu toʻliq maʼnodagi korrektlik shartlarini (yaʼni, yechim mavjudligi, yagona boʻlishi va barqarorligini) toʻliq qanoatlantirmaydigan masaladir. Bunday masalalarda bir nechta yechimlar mavjud boʻlishi yoki yechimlar beqaror (noaniq) boʻlishi mumkin. Biroq bu holat masalaning umuman yechib boʻlmasligini anglatmaydi. Shartli korrekt masalalar maxsus usullar va yaqinlashtirish yondashuvlari yordamida hal qilinishi mumkin.

Masala shartli korrekt deb ataladi, agar u uchta shartdan:

1. Yechim mavjudligi (существование),
2. Yechimning yagona boʻlishi (единственность),
3. Yechimning kirish maʼlumotlariga uzluksiz bogʻliqligi (устойчивость)

orasidan faqat dastlabki ikkitasini (yaʼni mavjudlik va yagonalik) qanoatlantirsa,lekin uchinchi shart – barqarorlik (uzluksiz bogʻliqlik) buzilgan boʻlsa.Shunda masala shartli korrekt deyiladi.

Agar $Au = f$ shaklidagi operator tenglamaning yechimi mavjud va yagona boʻlsa,lekin kichik xatolikdagi f^{δ} uchun yechim u^{δ} mavjud boʻlmasligi yoki $u^{\delta} \to u$ emasligi ehtimoli boʻlsa, u holda bu masala shartli korrekt hisoblanadi.

Shartli korrektlik shuni anglatadi: maxsus shartlar yoki qoʻshimcha maʼlumotlar asosida masala barqarorlashtiriladi. Boshqacha qilib aytganda:Masalaning yechimi mavjud va yagona boʻlsa ham,agar kichik oʻzgarishlar natijada katta yechim xatoliklariga olib kelsa, bu masala nokorrekt deb ataladi.

Quyidagi 1-tur operator tenglamani qaraymiz , $Ax = f, x \in X, f \in F$

bu yerda , X F Banax fazolari, A-kompakt operator. Faraz qiaylik, X fazosida M to‘plam ajratilgan bo‘lsin, $M \subset X$

Ta’rif. $Ax = f, x \in X, f \in F$ masala Tixonov bo‘yicha korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1) boshlang‘ichdan ma’lumki masalaning yechimi mavjud va M to‘plamga tegishli;

2) masalaning yechimi M to‘plamda yagona;

3) f funksiyaning yechimni M to‘plamdan tashqariga chiqarmaydigan cheksiz kichik o‘zgarishiga x yechimning cheksiz kichik o‘zgarishi mos keladi.

M_A bilan M to‘plamning A operator orqali F fazoga aksini belgilaymiz. U holda 3) shart quyidagi ko‘rinishni oladi:

3) M_A to‘plamda A operator uzluksiz.

M to‘plam korrektlik to‘plami $Ax = f, x \in X, f \in F$ deyiladi. Umuman aytganda, M chiziqli fazo bo‘lmaganligi uchun, masala bunday ko‘rinishda chiziqsiz masala bo‘lib qoladi.

Tixonov regulyarizatsiya parametri: Ushbu sxemaning markaziy qismi $\alpha > 0$ parametrining har bir qiymati uchun funktsiyasini (ko'pincha Tixonov funktsionali deb ataladi) qurishdir, bu regulyarlash parametri deb ataladi.

$$M^{\alpha}(z) \equiv \left\| A^h z - u^{\delta} \right\|^2 + \alpha \left\| z \right\|^2, z \in Z \qquad (1)$$

Bu yerda, avvalgidek, A^h - operator , u^{δ} - element, A^0 operatorining yaqinliklari va u^0 o'ng tomoni.

$$\left\| A^h - A^0 \right\| \le h, .. \left\| u^{\delta} - u^0 \right\| \le \delta$$

Shubhasiz, silliqlashtiruvchi funksional M^{α} butun Z fazoda kuchli qavariq hisoblanadi (kvadratik funksionalning qavariqligi $\left\| A^h z - u^{\delta} \right\|^2$ va stabilizatsiyalovchi funksionalning kuchli qavariqligi $\left\| z \right\|^2, z \in Z$ tufayli).

Teorema: Aytaylik, avvalgidek, z^0 $A^0 z = u^0, z \in Z$ tenglamaning normal yechimi bo‘lsin.Agar $\alpha(\eta) \to 0$ bo‘lsa va $\eta \to 0$ moslik sharti $\dfrac{h^2 + \delta^2}{\alpha(\eta)} \to 0,$ bajarilsa, u holda $\left\| z_{\eta}^{\alpha(\eta)} - z^0 \right\| \to 0, \eta \to 0$ bo’ladi.

Teorema: $R(A^h, u^{\delta}, \eta) \equiv z_{\eta}^{\alpha(\eta)}$ formula orqali aniqlangan ***R* operatori** regulyarizatsiyalovchi operator hisoblanadi.

Nokorrekt masalalar kichik xatoliklarda ham sezilarli yechim farqiga olib keladi. Bunday masalalarni barqaror yechish uchun Tixonov regulyarizatsiyasi qo‘llaniladi. Tixonov teoremasi bu usulning matematik asosini berib, regulyarizatsiyalangan yechimning haqiqiy yechimga yaqinlashishini kafolatlaydi. Bu yondashuv teskari masalalar va amaliy hisoblashlarda muhim ahamiyatga ega.

Ushbu maqola kitoblardan o‘rganilgan bilimlar asosida talabalar tomonidan tayyorlandi. Kamchiliklar bo‘lsa uzr so‘raymiz.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. А.Н. Тихонов, В.Я. Арсеньин. «Методы решения некорректных задач». — М.: Наука, 1979.
2. В.М. Морозов. «Методы решения некорректных задач». — М.: Наука, 1986.
3. И.В. Новожилов. «Обратные задачи математической физики». —М. Физматлит, 2002.
4. Н.С. Барселона, Ю.И. Колесов «Некорректные задачи и методы их регуляризации». — Томск, 2005.
5. Tikhonov, A. N., and Arsenin, V. Y.»Solutions of Ill-Posed Problems». — Washington, D.C.: Winston & Sons, 1977 (Inglizcha tarjima).
6. М.И. Сумин МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА