

DIFFERENSIAL HISOBNING ASOSIY TEOREMALARI (FERMA, ROLL, LAGRANJ VA KOSHI TEOREMALARI)

Bozorov Jo'rabek Tog'aymurotovich

Termiz davlat universiteti "Matematik analiz"

Kafedra mudiri, Tel: +998901231906

Raxmatova Maral Shuxrat qizi

Termiz Davlat universiteti

Matematika yo'nalish 1-kurs talabasi

Annotatsiya: Mazkur maqolada differensial hisobning asosiy teoremlari-Ferma, Roll, Lagranj va Koshi teoremlari o'rganiladi. Bu teoremlar matematik analizning fundamental qismidir va funksiyalarni tahlil qilishda muhim o'rin tutadi. Har bir teoremaning matematik bayoni, geometrik ma'nosi va isboti bilan tanishiladi. Shuningdek bu teoremlar asosida hosila va differensialning xususiyatlarini chuqur tushunish imkoniyati yuzaga keladi.

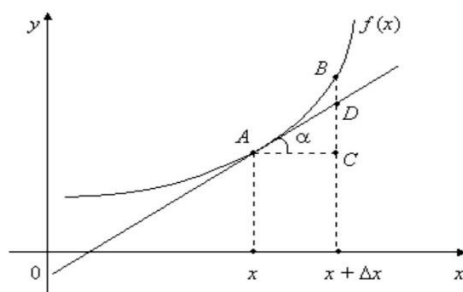
Tayanch tushunchalar: Hosila, differensial, differensiallanuvchilik, Ferma teoremasi, Roll teoremasi, Lagranj teoremasi, Koshi teoremasi, chekli hosila, uzluksizlik.

Kirish: Matematik analizda funksiyalarni tahlil qilishning asosiy vositalaridan biri-hosiladir. Chunki hosila funksiyaning o'zgarishini ifodalaydi. Hosila yordamida funksiya qanday o'zgarishini, uning eng yuqori yoki eng past qiymatlarini aniqlash mumkin. Bu jarayonlarda asosiy o'rinni egallovchi muhim teoremlar mavjud va ular Ferma, Roll, Lagranj va Koshi teoremlaridir. Ular o'zaro bog'liq bo'lib, bir-birini umumlashtiradi. Bu teoremlar matematikadan tashqari fizika, mexanika va boshqa ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi. Chunki ma'lumotlarni tahlil qilish va ularning o'zgarishi har qanday sohada kerak bo'ladi. Endi esa funksiya differensial tushunchasiga to'xtalamiz.

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin. Ma'lumki, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ayirma $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladi. Agar $\Delta f(x_0)$ ni ushbu $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$ ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi, bunda $A = \text{const}$, $\Delta x \rightarrow 0$, da $\alpha \rightarrow 0$. Funksiya orttirmasidagi $f'(x_0) \cdot \Delta x$ ifoda $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi differensial deyiladi va $df(x_0)$ kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

$x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning grafigini keltiraylik:



1-rasm

Keltirilgan chizmadan ko‘rinadiki, $\frac{DC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$ bo‘lib, $DC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AC = f'(x) \cdot \Delta x$ bo‘ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensial funksiya grafigiga $(x, f(x))$ nuqtada o‘tkazilgan urinma orttirmasi DC ni ifodalay ekan. $f(x)$ funksiyaning differensialini $df(x) = f'(x) \cdot dx$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

Ferma teoremasi: $f(x)$ funksiya X to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Shu to‘plamning ichki nuqtasida $c \in X$ o‘zining eng katta(kichik) qiymatiga erishsin. Agar shu nuqtada chekli ikki tomonlama hosila mavjud bo‘lsa, bu hosilaning qiymati 0 ga teng bo‘lishi zarurdir.

Isbot: Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya c nuqtada o‘zining eng katta qiymatiga erishsin deylik. Demak barcha x lar uchun $f(x) \leq f(c)$. U holda quyidagi ikkita holatni qarab chiqamiz:

1-hol: $\Delta x < 0$ bo‘lsa, $f'(c - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow f'(c - 0) \geq 0$ bo‘ladi.

2-hol: $\Delta x > 0$ bo‘lsa, $f'(c + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow f'(c + 0) \leq 0$ bo‘ladi.

Chekli ikki tomonlama hosila mavjud bo‘lishi uchun yuqoridagi ikki holat teng bo‘lishi kerak bo‘ladi va quyidagi natijaga kelamiz:

$$f'(c - 0) = f'(c + 0) = f'(c) = 0$$

Isbotlandi.

Ferma teoremasining geometrik ma‘nosi: X to‘plamda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma OX o‘qiga parallel bo‘ladi.



2-rasm

Roll teoremasi: Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lib, kesmaning oxirlarida teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda kesmaning ichida kamida bitta $c \in (a, b)$ nuqta mavjudki, unda hosila nolga teng, ya'ni $f'(c) = 0$ (Teoremaning shartlaridan aqalli bittasining buzilishi teorema tasdig'ining buzilishiga olib keladi).

Isbot: Shartga ko'ra $f(x) \in C[a, b]$. Unda Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a, b]$ da o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi, ya'ni shunday c_1, c_2 nuqtalar ($c_1, c_2 \in [a, b]$) topiladiki, unda

$$f(c_1) = \max\{f(x) | x \in [a, b]\},$$

$$f(c_2) = \min\{f(x) | x \in [a, b]\} \text{ shartlar bajariladi.}$$

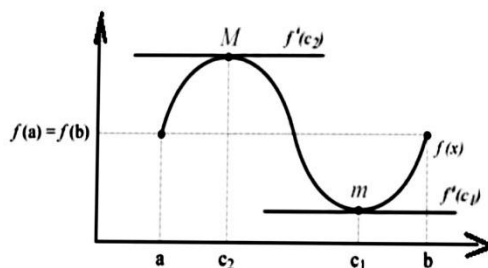
Bu yerda ham ikkita holni qaraymiz:

1-hol: Agar $f(c_1) = f(c_2)$ bo'lsa, unda $[a, b]$ da $f(x) = \text{const}$ bo'lib, $\forall x_0 \in (a, b)$ da $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

2-hol: Agar $f(c_1) \neq f(c_2)$ bo'lsa, u holda $f(a) = f(b)$ bo'lganligi sababli $f(x)$ funksiya $f(c_1)$ hamda $f(c_2)$ qiymatlarining kamida bittasiga $[a, b]$ kesmaning ichki $x_0 (a < x_0 < b)$ nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga binoan $f'(x_0) = 0$ bo'ladi.

Isbotlandi.

Roll teoremasining geometrik ma'nosi: shunday $c \in (a, b)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi.



3-rasm

Lagranj teoremasi: Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesma ichida kamida bitta $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ tenglik bajariladi. $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Isbot: Ushbu $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ yordamchi funksiyani qarab chiqaylik. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Uning hosilasi

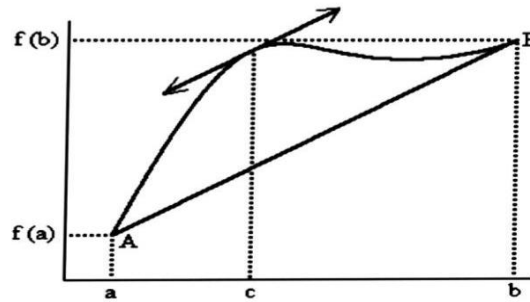
$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ bo'ladi. Roll teoremasiga ko'ra shunday $c (c \in (a, b))$ nuqta topiladiki, bunda $F'(c) = 0$ bo'ladi.

$$\text{Unga ko'ra } f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ va } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ bo'ladi.}$$

Isbotlandi.

Lagranj teoremasining geometrik ma'nosi: shunday $c \in (a, b)$ nuqta

mavjudki, bu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalardan o'tkazilgan vatarga parallel bo'ladi.



4-rasm

Koshi teoremasi: Agar ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi, shu bilan birga barcha $x \in (a, b)$ lar uchun $g'(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $[a, b]$ kesma ichida hech bo'lmaganda bitta $c \in (a, b)$ nuqta mavjudki, u nuqtada $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik bajariladi, bunda $g(b) \neq g(a)$.

Isbot: Ushbu $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)), (x \in [a, b])$ yordamchi funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya ham Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Uning hosilasi $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ bo'ladi. Roll teoremasiga ko'ra shunday $c (c \in (a, b))$ nuqta topiladiki, bunda $F'(c) = 0$ bo'ladi.

Unga ko'ra $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) = 0$ va $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ bo'ladi.

Isbotlandi.

Yuqoridagi teoremlarga bog'liq quyidagi misollarni qaraylik.

Misol: $y = 2x - x^2$ egri chiziqning AB yoyida shunday M nuqtani topingki, bu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'lsin, bunda $A(1;1)$ va $B(3;-3)$.

Yechilishi: Berilgan egri chiziq Lagranj teoremasi shartlarini qanoatlantiradi.

$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ga ko'ra $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = (2x-x^2)'$. Ushbu tenglamani yechsak $x=2$ va $y(2)=0$ natijaga erishamiz. Shunday qilib $M(2;0)$ nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'ladi.

Misol: $f(x) = x^3$ va $g(x) = x^2$ funksiyalar uchun $[0;1]$ kesmada Koshi teoremasini qanoatlantiruvchi c nuqtani toping.

Yechilishi: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ formulaga ko'ra $\frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \frac{3c^2}{2c}$ bo'ladi.

Tenglamani yechsak $c = \frac{2}{3}$ yechimga kelimiz.

Misol: Bizga $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ funksiya $[0;1]$ da berilgan bo'lsin. Agar ko'phadning koeffitsiyentlari $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[0;1]$ da kamida bitta yechimi borligini isbotlang.

Yechilishi: $g(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \dots + \frac{a_{n-1}}{2}x^2 + a_nx$ funksiyani $[0;1]$ da tekshiramiz. Bu ifoda ko'phad bo'lgani uchun $[0;1]$ da uzluksiz bo'ladi va differensiallanuvchi bo'ladi. Bunda $g(0)=0$ va $g(1)=\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2} + a_n = 0$ natijalarga kelamiz. Chetki nuqtalarda ko'phadning qiymatlari teng bo'lganligi uchun, uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lgani uchun Roll teoremasining shartlarini bajaradi. Demak $[0;1]$ da shunday c nuqta mavjudki unda $g'(c) = 0$ shart bajariladi.

$g'(x)=a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = f(x)$ bo'lgani uchun $f(x)$ funksiyaning $[0;1]$ oraliqda yechimi mavjud bo'ladi.

Isbotlandi.

Misol: $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi: Ushbu tengsizlikni isbotlash uchun $f(x)=\sin x$ funksiyani $[a;b]$ oraliqda qarab chiqamiz. Ushbu funksiya berilgan oraliqda uzluksiz, differensiallanuvchi va shuningdek Lagranj teoremasining shartlarini bajaradi. Lagranj teoremasiga ko'ra $\left| \frac{\sin a - \sin b}{a - b} \right| = f'(c) = |\cos c|$. Bunda $|\cos c| \leq 1$ ekanligini hisobga olsak quyidagi natijaga kelamiz: $\left| \frac{\sin a - \sin b}{a - b} \right| \leq 1 \Rightarrow |\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

Misol: Aytaylik $f(x)$ funksiya $[0;1]$ segmentda uzluksiz va $(0;1)$ oraliqda differensiallanuvchi. Agar $f(1) = 0$ bo'lsa, u holda $f'(C) = \frac{-f(C)}{C}$ shartni qanoatlantiruvchi $c \in (0, 1)$ nuqta topilishini isbotlang..

Yechilishi: Ushbu $F(x)=xf(x)$ yordamchi funksiyani qarab chiqaylik. $F(0)=0$ va $F(1)=f(1)=0$. Demak $F(0)=F(1)$. $F(x)$ funksiya $[0;1]$ da uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lib Roll teoremasidagi shartlarni qanoatlantiradi. Unga ko'ra $c \in (0; 1)$ da $F'(c)=0$ bo'ladi. Yordamchi funksiyaning hosilasi $F'(x)=f(x)+x f'(x)$ ko'rinishda bo'ladi. Yuqoridagi xulosaga ko'ra

$$F'(c)=f(c)+c f'(c)=0 \Rightarrow f(c)+c f'(c)=0$$

$c \in (0; 1)$ da $c \neq 0$ bo'lgani uchun tenglikni c ga bo'lib yubora olamiz. Undan esa $f'(C) = \frac{-f(C)}{C}$ natijaga kelamiz.

Adabiyotlar ro'yxati:

1. Sadaddinova S.S. Hisob (Calculus): O'quv qo'llanma. – Toshkent: TATU.
2. G.Xudayberganov, A.K.Vorisov, X.T.Mansurov, B.A.Shoimqulov. Matematik analizdan ma'ruzalar: O'quv qo'llanma. "Vorish-nashriyot" Toshkent-2010.
3. B.A.Shoimqulov, T.T.Tuychiyev, D.H.Djumaboyev. Matematik analizdan mustaqil ishlar: O'quv qo'llanma. "O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati" nashriyoti, Toshkent-2008.
4. T.Azlarov, X.Mansurov. Matematik analiz 1-qism. Toshkent "O'qituvchi"-1994.
5. <https://arxiv.uz>
6. <https://soff.uz>