

УЛУЧШЕННЫЙ АНАЛОГ ОЦЕНКИ В.Н.ЧУБАРИКОВА

*Дилдора Кобилова Гуломовна**Узбекско-Финский педагогический институт**Кафедра математики, Докторант*

Аннотация: в настоящей статье исследуются осциллирующие интегралы с полиномиальной фазой специального вида и гладкой амплитудой, имеющей компактный носитель. Показано, что при таких условиях оценки, полученные В.Н. Чубариковым, можно улучшить. Основное внимание уделяется тому, как особенности фазовой функции и амплитуды влияют на поведение интегралов. Доказана новая теорема, уточняющая и расширяющая ранее известные результаты, а также приведено следствие для фазовой функции определённой структуры.

Ключевые слова: осциллирующие интегралы, тригонометрические интегралы, фазовая функция, амплитуда, оценка интегралов, интегрирование по частям.

Введение

Оценка осциллирующих и тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой является важной задачей гармонического анализа и теории чисел. В ряде классических работ, в частности в трудах В.Н. Чубарикова, были получены эффективные оценки для таких интегралов в случае специальной фазовой функции и амплитуд с определёнными свойствами. Однако в более общем случае, когда амплитуда является гладкой функцией с компактным носителем, возможны улучшения этих оценок. В данной статье мы предлагаем модифицированный подход к оценке осциллирующих интегралов, опирающийся на тонкие свойства фазовой функции и структуры амплитуды. Предложенная теорема и её следствие демонстрируют, что при определённых условиях можно достичь более точных асимптотических оценок.

В работе В.Н.Чубарикова получены оценки тригонометрических интегралов с полиномиальной фазой специального вида. Отметим, что в этой работе рассматриваются тригонометрические интегралы со специальной амплитудной функции $a = \chi_{[0,1]}(x)$.

В данной работе мы исследуем осцилляторные интегралы с аналогичной фазой, но с гладкой амплитудой, имеющей компактный носитель. Мы покажем, что в этом случае оценки В.Н.Чубарикова могут быть улучшены. Это обстоятельство связано с тем, что особенности фазовой функции и амплитуды не сгущаются.

Теорема . Если $|F''_{x_1}(x_1, x_2)| \geq r$ то,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} a(x_1, x_2) \exp(iF(x_1, x_2)) dx_1 \right| \leq \frac{c \|a(\bullet, x_2)\|_V}{r^{1/2}}$$

где, $\|a(\bullet, x_2)\|_V = |a(-\infty)| + V[a] = \int_{-\infty}^{\infty} |a'(x_1, x_2)| dx_1 + |a(-\infty)|$.

В результате получим:

$$\begin{aligned} |J| &\lesssim \frac{1}{|\lambda s_{12}|^{1/2}} \int_{U_1} \left| \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{U_2} a(y_1 + y_2, y_1 - y_2) \exp(i\lambda(\delta_2 y_2 - s_{12} y_2^2)) dy_2 \right| dy_1 \lesssim \\ &\lesssim \frac{1}{|\lambda s_{12}|^{1/2}} \int_{U_1} \left| \int_{U_2} \exp(i\lambda(\delta_2 y_2 - s_{12} y_2^2)) \frac{\partial a(y_1 + y_2, y_1 - y_2)}{\partial y_1} dy_2 \right| dy_1 \lesssim \\ &\lesssim \frac{1}{|\lambda s_{12}|} \int_U \left| \frac{\partial^2 a(y_1 + y_2, y_1 - y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \right| dy_1 dy_2 \lesssim \frac{|U| \|a\|_{C^2}}{|\lambda| (|s_1| + |s_2| + |s_{12}|)}, \end{aligned}$$

где окрестность $U_1, U_2 \subset R$ выбраны так, что $U \subset U_1 \times U_2$.

Используя неравенство

$$\|a\|_{C^1} \leq \|a\|_{C^2}$$

имеем следующую оценку для J :

$$|J| \lesssim \frac{\|a\|_{C^2}}{|\lambda| (|s_1| + |s_2| + |s_{12}|)}.$$

Оценка доказана при $r = 2$. Предположим, что она справедлива для $r - 1$.

$$\begin{aligned} \Phi &= s_{12\dots r} x_1 x_2 \dots x_r + s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_r x_r + s_{12} x_1 x_2 + \dots + s_{1r} x_1 x_r + s_{2r} x_2 x_r + \dots + s_{3r} x_3 x_r + \dots + \\ &+ s_{12\dots r-1} x_1 x_2 \dots x_{r-1} = x_1 (s_1 + s_{1r} x_r) + x_2 (s_2 + s_{2r} x_r) + \dots + x_1 \dots x_{r-1} (s_{12\dots r-1} + s_{12\dots r} x_r), \end{aligned}$$

$$J = \int_R \int a(x_1, \dots, x_r) \exp(i\lambda(x_1(s_1 + s_{1r} x_r) + x_2(s_2 + s_{2r} x_r) + \dots + x_1 \dots x_{r-1}(s_{12\dots r-1} + s_{12\dots r} x_r))) dx_1 \dots dx_r$$

Рассмотрим следующие случаи

$$\begin{aligned} |s_r| &\leq \max \left\{ \sum_{\substack{0 \leq t_j \leq r \\ 1 \leq j \leq r \\ t_i \neq t_j}} |s_{t_1 t_2 \dots t_r}| \right\} \\ |s_r| &> \max \left\{ \sum_{\substack{0 \leq t_j \leq r \\ 1 \leq j \leq r \\ t_i \neq t_j}} |s_{t_1 t_2 \dots t_r}| \right\} \end{aligned}$$

Если выполняется (3), то для интеграла J по предположению индукции имеем:

$$|J| \lesssim \|a\|_{C^2} \int_R \min \left\{ 1, \frac{\left\| \ln \lambda \sum_{t_l \neq t_k} s_{t_1 \dots t_j} + s_{t_1 \dots t_j t_r} x_r \right\|^{r-3}}{\lambda \sum_{t_l \neq t_k} |s_{t_1 \dots t_j} + s_{t_1 \dots t_j t_r} x_r|} \right\} dx.$$

Применим лемму 2 и получим следующую оценку

$$|J| \lesssim \frac{\|a\|_{C^2} \|\ln \lambda s\|^{r-2}}{|\lambda s|}.$$

Если выполняется (4), то мы можем применить формулу интегрирования по частям по x_r и получим:

$$|J| \lesssim \frac{\|a\|_{C^1}}{|\lambda s_r|}.$$

Отсюда легко следует искомая оценка. Теорема 1 доказана.

Следствие . Если фазовая функция имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r, s) = x_1 x_2 \dots x_r + \sum_{\substack{0 \leq t_j \leq r \\ 1 \leq j \leq r}} s_{t_1 t_2 \dots t_r} x_{t_1} x_{t_2} \dots x_{t_r}$$

то для любых значений s и $|\lambda| > 2$ справедлива оценка $|J| \lesssim \frac{(\ln |\lambda|)^{r-2}}{|\lambda|}.$

Заключение

В данной работе представлена усовершенствованная оценка осциллирующих интегралов с полиномиальной фазой и гладкой амплитудой, обладающей компактным носителем. Проведённый анализ показывает, что особенности амплитуды и фазовой функции играют ключевую роль в улучшении существующих оценок. Доказанная теорема уточняет ранее известные результаты В.Н. Чубарикова и открывает возможности для дальнейших исследований в данной области, включая многомерные обобщения и приложения в теории кратных экспоненциальных сумм.

Цитированная литература

1. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. “Тригонометрические интегралы” Изв.АН СССР Сер. Мат. 43(5) (971-1003), 1979.
2. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. “Теория кратных тригонометрических сумм” Москва, Наука, 1987.
3. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. “Особенности дифференцируемых отображений” М.Наука 1982-1984 ,ч.I и II.
4. Stein E.M. Harmonic analysis , Princefon Univ. press Princefon , 1993.
5. А.Н.Варченко Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов Функционал анализ и его приложения. 1976, т.10 вып.5 (13-38).
6. Чубариков В.Н. Математические заметки т.20, №1, 1976, 61-68.