GIPERBOLANING AJOYIB XOSSALARI

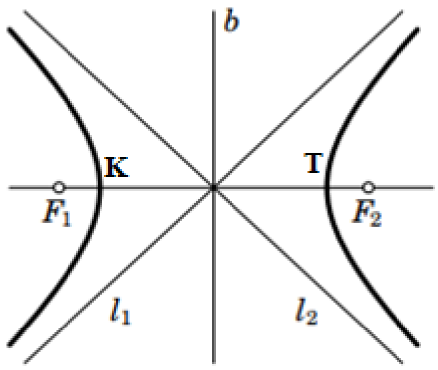
Jabborov Muxammadi Musurmon o'g'li
TDPU, Toshkent, O'zbekiston.
E-mail: muxammadijm@mail.ru

Annotatsiya: Ushbu maqolada ikkinchi tartiqbli chiziqlardan biri giperbolaning ajoyib xossalari haqida so'z boradi. Giperbolaning xossalari, jumladan optik xossalarining tadbiqlari ko'plab uchraydi. Quyida ushbu xossalardan ba'zilarini keltiramiz.

Kalit so'zlar: Giperbola, urinma, burchak, optik, fokus, bissiktrisa**.**

Fan, texnika hamda ishlab chiqrishda ikkinchi tartibli chiziqlarning ko'plab xossalaridan foydalaniladi. Pedagogika OTM larining Matematika yo'nalishida ikkinchi tartibli chiziqlar bo'limi geometriya fani negizida 1-bosqich talabalariga o'rgatiladi. Bu bo'limda ikkinchi tartibli chiziqlar haqida umumiy tushunchalar, ularning ko'plab xossalari, ikkinchi tartibli chiziqlarning klassifikatsiyasi va ularga doir misollar o'rganiladi. Oxirgi yillarda matematika olimpidalarida uchraydigan ikkinchi tartibli chiziqlarga oid shunday misollar borki, bu misollarni oddiy elementar xossalar yordamida yechib bo'lmaydi. Buning uchun talabalar ikkinchi tartibli chiziqlarning ayrim maxsus xossalarini o'rganishiga to'g'ri keladi. Bunday ajoyib xossalar ikkinchi tartibli chiziqlar bo'limida ko'plab uchraydi. Shu sababli biz bu maqolada ikkinchi tartibli chiziqlar oilasiga mansub bo'lgan egri chiziq, giperbolaning shu kabi bir necha ajoyib xossalarni keltiramiz.

Ta'rif. Tekislikda har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikkita F_1, F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan KT kesma uzunligiga teng bo'lgan barcha nuqtalar to'plami Giperbola deb ataladi.



1-rasm

Berilgan kesma uzunligi fokuslar orasidagi masofadan kichik (1-rasm).

Giperbolaning ixtiyoriy P nuqtasidan uning F_1, F_2 fokuslarigacha masofalar uning fokal radiuslari deb ataladi va r_1, r_2 orqali belgilanadi.

Berilgan kesma uzunligini $KT = 2a\ (a > 0)$ bilan, fokuslar orasidagi masofani $F_1F_2 = 2c\ (c > 0)$ bilan belgilash kiritilsa, u holda ta'rifga ko'ra $2a < 2c \Rightarrow a < c \Rightarrow a^2 < c^2$.

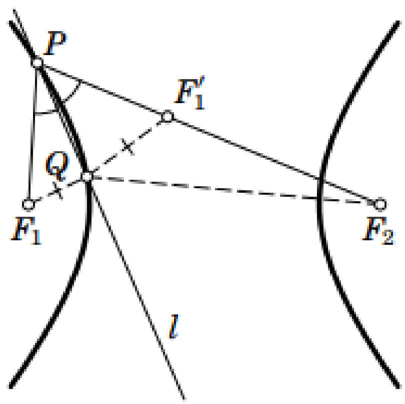
Giperbolaning ko'plab xossalarini o'rganishda ekssentrisitet deb nomlanuvchi

$e=\dfrac{c}{a}>1$ kattalikdan foydalaniladi. Xususan fokal radiuslar hamda giperbolaga tegishli $M(x,y)$ nuqta uchun $\begin{cases} x>0 \Rightarrow r_1=ex-a, r_2=ex+a \\ x<0 \Rightarrow r_1=a-ex, r_2=-a-ex \end{cases}$ tengliklar o‘rinli.

Dekart koordinatalari sistemasida $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ tenglama giperbolaning kanonik tenglamasi deb ataladi, bu yerda $b^2=c^2-a^2$.

Adabiyotlarda giperbolaning ko‘plab elementar xossalari keltirilgan, biz bu maqolada elementar xossalarni keltirmaymiz, faqat giperbolaning **“optik”** va **“izogonal”** xossalarini keltiramiz.

1-xossa. Giperbolaning biror P nuqtasidan l urinma o‘tkazilgan bo‘lsin. U holda l to‘g‘ri chiziq F_1PF_2 burchakni teng ikkiga ajratadi (2-rasm).



2-rasm

Isbot. Bu xossani isbotlash uchun koordinatalar metodidan foydalanamiz. Buning uchun giperbola markazini koordinatalar boshiga joylashtirib quyidagicha koordinatalar kiritaylik. Giperbolaning fokuslari $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ nuqtalarda joylashgan hamda $P(x_0,y_0)$ nuqtadan urinma o‘tkazilgan bo‘lsin.

Bizga ma’lumki yuqoridagi ko‘rinishda berilgan giperbolaning kanonik tenglamasi $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ko‘rinishda, unga biror $P(x_0,y_0)$ nuqtasidan o‘tkazilgan l urinmaning tenglamasi $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ ko‘rinishda bo‘ladi. F_1, F_2 fokuslardan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan F_1D_1, F_2D_2 masofalarni topaylik.

$$F_1D_1=\frac{\left|\dfrac{-cx_0}{a^2}-\dfrac{0\cdot y_0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\left|-\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{c}{a}x_0-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\left|-\dfrac{1}{a}\cdot ex_0-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$F_2D_2=\frac{\left|\dfrac{cx_0}{a^2}-\dfrac{0\cdot y_0}{b^2}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\left|\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{c}{a}x_0-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{\left|\dfrac{1}{a}\cdot ex_0-1\right|}{\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}=\frac{r_2}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$

Fazraz qilaylik $F_1P=r_1$ fokal radius l bilan α_1, $F_2P=r_2$ fokal radius l bilan α_2 o‘tkir burchaklar hosil qilsin (2-rasm).

Endi bu burchaklarning o‘zaro teng ekanligini ko‘rsatamiz.

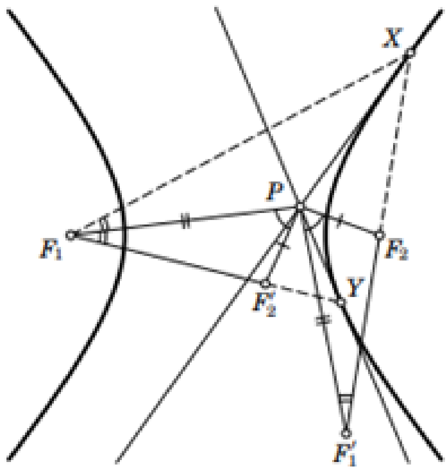
$$\sin\alpha_1 = \frac{F_1D_1}{F_1P} = \frac{\dfrac{r_1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}}{r_1} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}},$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{F_2D_2}{F_2P} = \frac{\dfrac{r_2}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}}{r_2} = \frac{1}{a\sqrt{\dfrac{x_0^2}{a^4}+\dfrac{y_0^2}{b^4}}}.$$ Demak, $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Bu xossadan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

1-natija: Giperbolaning biror P nuqtasidan l urinma o‘tkazilgan bo‘lsin. U holda l to‘g‘ri chiziq $\angle F_1PF_2$ burchakning ichki bissektrisasi bo‘ladi.

2-xossa. Giperbola tashqarisida yotuvchi P nuqtadan unga ikkita urinmalar o‘tkazilgan bo‘lsin. Agar bu urinmalar giperbolaga X va Y nuqtalarda urinsa u holda $\angle F_1PX'$ va $\angle F_2PY$ o‘tkir burchaklar o‘zaro tengdir.



3-rasm

Isbot. Aytaylik F_1', F_2' nuqtalar mos ravishda PX va PY to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan F_1 va F_2 nuqtalarga simmitrik nuqtalar bo‘lsin (3-rasm). U holda $PF_1' = PF_1$ va $PF_2' = PF_2$ tenglik o‘rinli. 1-xossaga ko‘ra F_1, Y va F_2' bir to‘g‘ri chiziqda yotadi. Xuddi shunday F_2, X va F_1' bir to‘g‘ri chiziqqa tegishli. 1-xossaga ko‘ra $\angle PXF_1 = \angle PXF_1'$ hamda tanlanishiga ko‘ra $XF_1 = XF_1'$ bu ikkala tenglikdan $\triangle XF_1P = \triangle XF_1'P$ tenglik, bundan $\angle XF_1P = \angle XF_1'P$ tenglik o‘rinli. Yuqoridagilardan $\triangle PF_2F_1'$ va $\triangle PF_1F_2'$ uchburchaklar (ikki tomoni va bitta burchagiga ko‘ra) o‘zaro teng.

Demak, $\triangle PF_2F_1'$ va $\triangle PF_1F_2'$ uchburchaklarda $\angle F_1PX' = \angle F_2PY$.

2-natija: Giperbola tashqarisida yotuvchi P nuqtadan unga ikkita urinmalar giperbolaga X va Y nuqtalarda urinsa u holda F_1P chiziq $\angle XF_1Y$ burchakning bissiktrisasi bo‘ladi.

Ushbu natijaning isboti $\triangle PF_2F_1' = \triangle PF_1F_2'$ tengligidan ularning mos burchaklari tengligi, ya’ni $\angle PF_1F_2' = \angle PF_1'F_2$ tenglik, hamda $\angle XF_1P = \angle XF_1'P$ tenglikdan kelib chiqadi.

Aytish joizki, biz bu maqolada faqat giperbolaning ayrim ajoyib xossalarini keltirdik. Bu kabi ajoyib xossalarni boshqa ikkinchi tartibli chiziqlar, ya'ni ellips va parabolalarda ham ko'rish mumkin. Yuqoridagi xossalarga doir misollar, hamda giperboladan boshqa ikkinchi tartibli chiziqlarning bu kabi xossalarini keying maqolalarda keltirishni rejalashtirdik.

Adabiyotlar:

1. А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. Москва. М.: МЦНМО, 2007.
2. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М.: Наука, 1968.
3. Заславский А. А. Геометрические преобразования. М.: МЦНМО, 2003.
4. Берже М. Геометрия, Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.