ISSN 2181-3187

KARRALI ILDIZLAR UCHUN NYUTON METODI.

Farg'ona davlat Unversiteti amaliy
matematika va informatika kafedirasi

katta o'qituvchisi fizika-matematika
fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
A.I.Ismoilov
ismoilovaxrorjon@yandex.com

Amaliy matematika yo'nalish talabasi
Nu'monova Malohat
igf5284@gmail.com

Annotatsiya

Nyuton-Rafson metodi, odatda bir o'lchovli funktsiyaning ildizini topish uchun ishlatiladi. Ammo, ba'zi hollarda funktsiyaning ildizlari bir necha marta takrorlanadi (karrali ildizlar). Karrali ildizlar uchun Nyuton metodini ishlatishda, ildizning ko'pligi (ya'ni ildizning marta takrorlanishi) hisobga olinadi, chunki bu holatda funktsiyaning o'zgarishi va hosilasi normaldan farq qiladi. Karrali ildizlar uchun Nyuton metodining asosiy farqi, ildizni hisoblash formulasi bo'yicha hosila va funktsiyaning o'zgarishini karrali ildizning ko'pligiga nisbatan moslashtirishda yotadi.

Annotation

The Newton-Raphson method is typically used to find the roots of a single-variable function. However, in some cases, the function's roots are repeated (multiple roots). When using the Newton method for multiple roots, the multiplicity of the root (i.e., how many times the root is repeated) must be taken into account, as in this case, the behavior of the function and its derivatives differs from the usual case.

ISSN 2181-3187

The main difference for the Newton method when applied to multiple roots lies in adjusting the formula for calculating the root by taking into account the multiplicity of the root. Specifically, the function and its derivative are modified in relation to the root's multiplicity.

Аннотация

Метод Ньютона-Рафсона обычно используется для нахождения корней функции с одной переменной. Однако в некоторых случаях корни функции могут быть кратными (повторяющимися). При использовании метода Ньютона для кратных корней необходимо учитывать кратность корня (то есть, сколько раз корень повторяется), поскольку в этом случае поведение функции и её производных отличается от обычного случая. Основное отличие метода Ньютона для кратных корней заключается в изменении формулы для вычисления корня с учётом кратности корня. Конкретно, функция и её производная изменяются в зависимости от кратности корня.

Kalit so'zlar: Nyuton-Rafson Metodi,Karrali ildizlar,Funktsiya ildizi,Ko'p karra ildiz,Hosila

Keywords: Newton-Raphson method,Multiple roots,Root of a function,Multiple (repeated) root,Derivative

Ключевие слова: Метод Ньютона-Рафсона,Кратные корни,Корень функции,Множественный (повторяющийся) корень,Производная

Dastlabki tushunchalar. Ushbu

$$f'(x) = 0 \quad (1)$$

chiziqli bo'lmagan tenglamaning ildizi (ildizlarini) topish talab etiladi.

ISSN 2181-3187

Agar $f(x)$ funksiya ko'phad bo'lsa, u holda (1) tenglama n-darajali algebraik tenglama deb ataladi, ya'ni

$$f(x) = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (2)$$

bunda $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ berilgan berilgan $P(x)$ ko'phadning koeffisiyentlari.

Nyuton teoremasi.

Agar $x = c > 0$ uchun $f(x)$ ko'phad va unung barcha hosilalari nomanfiy bo'lsa, ya'ni $f'(x), f''(x), \ldots f^n(x)$ u holda $R = c$ ni (2) tenglamaning musbat ildizlari uchun yuqori chegara deb hisoblash mumkin.

Isbot: Teylor formulasiga ko'ra

$$f(x) = f(c) + f'(c)(c-x) + \ldots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

Teorema shartiga ko'ra $x > c$ bolganda bu tenglikning o'ng tomoni musbatdir. Demak, (2) tenglamalarning barcha x^+ musbat ildizlari $x^+ < R$ Tengsizlikni qanoatlantiradi.

Bu teoremalar faqat musbat ildizlarning yuqori chegarasini aniqlaydi.

Quyidagi

$$f_1(x) = (-1) f(-x) = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n$$

ISSN 2181-3187

$$f_2(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$f_3(x) = (-x)^n f\left(-\frac{1}{x}\right) = a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_0$$

Ko'phadlarga yuqoridagi teoremalarni qo'llab, $f(x), f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ lar musbat ildizlarning yuqori chegaralari R_0, R_1, R_2, R_3 larni mos ravishda topgan bo'lsak, u vaqtda (2) tenglamaning hamma x^+ musbat ildizlari v $\frac{1}{R^2} \leq x^+ \leq R$ hamma x^- manfiy ildizlari esa $-R_1 \leq x^- \leq -\frac{1}{R_3}$ tengsizlikni qanoatlantirar ekan.

Nyuton metodi Tenglamalarni yechish metodlari orasida eng dastlabkilaridan biridir. Shuning uchun ham yaqinlashish tezligini ortirish yoki hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida bu metodni o'zgartirish yo'lida juda ko'p urinishlar bo'lgan. Shularning ayrimlariga to'htalib o'tamiz .

Shu vaqtgacha x_n ketma-ket yaqinlashishlar yotgan oraliqda $f'(x) \neq 0$ deb faraz qilingan edi, bundan tashqari $f'(\xi) \neq 0$ yani ξ tub ildiz bo'lgan xol karrali edi. 1870-yilda E.Shredir ξ ildiz p - karrali bo'lgan holni tekshirib chiqdi. Biz hozir anashu hilni ko'rib chiqamiz . Biz avval $p > 1$ bo'lganda Nyuton ketma-ketligikerakli ravishda o'zgartirilganda uning tez yaqinlashishini ko'rsatamiz . ξ yechim $f(x)$ ning p -karrali ildizi bo'lgani uchun , ξ yechim atrofidagi $f(x)$ ning Teylor qatoridagi yoyilmasi quyidagicha bo'ladi:

$$f(x) = C_p(x-\xi)^p + C_{p+1}(x-\xi)^{p+1} + \ldots + C_m(x-\xi)^m + R_m(x)$$

ISSN 2181-3187

$$C_k = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \qquad (k = p, p+1, \dots, m) \tag{6.28}$$

Faraz qilaylik, x^n lar ξ ga yaqin bo'lsin, u holda $\xi_n = \xi - x_n$ kichik miqdor bo'ladi.Nyuton qoydasidan ξ_n bilan ξ_{n+1} orasidagi munosabatni chiqaramiz:

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f!(\xi - \varepsilon_n)} \tag{6.29}$$

(6.28) yoyilmada faqat ikkita bosh hadlarni saqlab, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$f(\xi - \varepsilon_n) = (-1)^p \left[C_p \varepsilon_n^p - C_{p-1} \varepsilon_n^{p+1} + \dots \right]$$

$$f'(\xi - \varepsilon_n) = (-1)^{p-1} \left[pC_p \varepsilon_n^{p-1} - (p+1) C_{p+1} \varepsilon_n^p + \dots \right]$$

$$\frac{1}{f'(\xi - \varepsilon_n)} = \frac{(-1)^{p-1}}{pC_p \varepsilon_n^{p-1}} \left[1 - \frac{(p+1)}{pC_p} C_{p+1} \varepsilon_n^p + \dots \right]$$

$$\frac{f(\xi - \varepsilon_n)}{f'(\xi - \varepsilon_n)} = -\frac{\varepsilon_n}{p} \left[1 + \frac{C_{p+1}}{C_p} \varepsilon_n^p + \dots \right]$$

Oxirgi tenglikka olib borib (6.29) qo'yamiz:

ISSN 2181-3187

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\varepsilon_n - \frac{C_{p+1}}{p^2 C_p}\varepsilon_n^2 + \ldots$$

Bunda faqat bitta bosh hadini qoldirib,quyidagi taqribiy tenglikka ega bolamiz:

$$\varepsilon_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\varepsilon_n$$

Bu tenglik shuni ko'rsatadiki ε_n taqriban mahraji $q = 1 - \frac{1}{p}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya bo'yicha kamayadi. Buni $f'(\xi) \neq 0$ bo'lgan hol bilan solishtirib ko'rsak, $p \succ 1$ bo'lganda yaqinlashish tezligini sustlashishini ko'ramiz.

Haqiqatan ham,

$$0 = f(\xi) = f(\xi - \varepsilon_n) + \varepsilon_n f'(\xi - \varepsilon_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(\xi - \sigma\varepsilon_n)$$

$$(0 \prec \sigma \prec 1)$$

tenglikdan va (6.29) dan

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi - \sigma\varepsilon_n)}{f''(\xi - \varepsilon_n)}\varepsilon_n^2 \qquad (6.30)$$

ni hosil qilamiz,bunda ε_n ni yetarlicha kichik deb olib ε_{n+1} bilan ε_n orasidagi

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f''(\xi)}\varepsilon_n^2 \qquad (6.31)$$

ISSN 2181-3187

munosanatni hosil qilamiz. Bu yerda ε_n kvadratik qonun bilan kamayadi. $p \succ 1$ bo'lganda yaqinlashish tezligini ortirish uchun Nyuton qoidasini

$$x_{n+1} = x_n - p\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (6.32)$$

ga almashtiramiz. U holda (6.30) dan ε_{n+1} bilan ε_n orasidagi quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$\varepsilon_{n+1} \approx -\frac{f''(\xi)}{f''(\xi)}\varepsilon_n^2 = \frac{f^{(p+1)}(\xi)}{p(p+1)f^{(p)}(\xi)}\xi_n^2 \qquad (6.33)$$

Bundan ko'ramizki, ξ ildiz p karrali bo'lganda (6.32) qoida uchun yaqinlashish taqriban Nyuton qoidasining yaqinlashishiga teng.

Xulosa

Karrali ildizlar uchun Nyuton metodining standart ko'rinishi sekin konvergensiyaga olib kelishi mumkin, chunki ildizning ko'paytmaliligi hisobga olinmaydi. Shu sababli, modifikatsiyalangan Nyuton metodi, ya'ni ildizning ko'paytmaliligi ni hisobga olgan holda formulasidan foydalanish, yaqinlashuv tezligini sezilarli oshiradi. Ushbu usul, ayniqsa, karrali ildizlarni aniqlashda yuqori samaradorlikka ega bo'lib, hisoblashlar sonini kamaytiradi va aniqlikni oshiradi. Shu bois, karrali ildizlarni topishda modifikatsiyalangan Nyuton metodidan foydalanish maqbul yechim hisoblanadi.

Foydalanilganadabiyotlar:

1. Ахмедов Х.Х. Matematik analiz. – Toshkent:“Fan va texnologiya”, 2016.
2. Буюкли Н.Н., Ҳамидов А.И. Numerik usullar. –Toshkent: O'zMU nashriyoti, 2008.
3. Калитевский Н. Численные методы. – Москва: Высшая школа,2001.

ISSN 2181-3187

4. Самойленко А.М., Геворкян А.Э. Методы приближенногорешения уравнений. – Киев: Наукова думка, 1989

5. Хомченко П.А. Краткий курс высшей математики. – Москва:Феникс, 2006.

6. Иноятов Ш.И. Matematik analiz va differensialtenglamalar. – Toshkent: TDPU, 2015.

7. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. –Boston: Cengage Learning, 2011.