ISSN 2181-3187

TENGLAMALARNI YECHISHDA ODDIY ITERATSIYA METODI

Farg'ona davlat universiteti amaliy
matematika va informatika kafedrasi katta
o'qituvchisi fizika-matematika fanlari
bo'yicha falsafa doktori(PhD) **A.I.Ismoilov**
ismoilovaxrorjon@yandex.com
Amaliy matematika
yo'nalishi talabasi
Olimova Lobarxon
lobarxonkamolova0104@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu maqolada algebraik tenglamalarni yechishda qo‘llaniladigan oddiy iteratsiya metodining nazariy asoslari, yaqinlashish shartlari va yechim usullari bayon qilingan. Teorema va misollar yordamida metodning samaradorligi ko‘rsatilib, konkret tenglamalar uchun ildizlar aniqlangan.

Annotation

This article presents the theoretical foundations of the simple iteration method used in solving algebraic equations, along with convergence conditions and solution techniques. The effectiveness of the method is demonstrated through theorems and examples by calculating the roots of specific equations.

Аннотация

В данной статье изложены теоретические основы метода простой итерации, применяемого для решения алгебраических уравнений, а также условия сходимости и способы вычисления решений. На основе теорем и примеров показана эффективность метода при нахождении корней конкретных уравнений.

Kalit so'zlar: Iteratsiya metodi, yaqinlashish, algebraik tenglama, kanonik shakl, ildiz topish.

Keywords: Iteration method, convergence, algebraic equation, canonical form, root finding.

Ключевие слова: Метод итерации, сходимость, алгебраическое уравнение, каноническая форма, нахождение корня.

Kirish

Ko‘plab algebraik va transsendental tenglamalarni aniq usullar bilan yechish mushkul bo‘lgan holatlarda iteratsion yondashuvlar qo‘llaniladi. Oddiy iteratsiya metodi — bu ildizga ketma-ket yaqinlashish orqali tenglamani sonli yechish usulidir. Ushbu maqolada bu metodning ishlash printsipi, yaqinlashish shartlari va aniq misollar orqali qo‘llanilishi ko‘rib chiqiladi.

Oddiy iteratsiya metodi. Biz hozir oddiy iteratsiya (yoki ketma-ket yaqinlashish) metodi bilan bitta sonli tenglama misolida tanishamiz. Iteratsiya metodini qo’llsh uchun $f(x)=0$ tenglama unga teng kuchli bo’lgan quyidagi

$$x=\varphi(x) \qquad (3.1)$$

kanonik shaklga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo’lishi kerak. (3.1) tenglamning ildizi yotgan atrofning biror x_0 nuqtasini izlanayotgan ildizning nolinchi yaqinlashishi deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishni topish uchun (3.1) ning o’ng tomoniga x_0 ni qo’yamiz va xosil bo’lgan qiymatini x_1 bilan belgilaymiz, ya’ni:

$$x_1=\varphi(x_0) \qquad (3.2)$$

Topilgan x_1 sonni (3.1) ning o’ng tomoniga qo’yib yangi son $x_2=\varphi(x_1)$ hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib n-yaqinlashish x_n ni $(n-1)$-yaqinlashish x_{n-1} yordamida topamiz:

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \qquad (n=1,2,3,...) \qquad (3.3)$$

ISSN 2181-3187

Bu formula yordamida topilgan sonlar ketma-ketligining limiti, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \qquad (3.4)$$

Mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, (3.3) tenglik har ikkala tomonida limitga o'tib,

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi)$$

Ya'ni

$$\xi = \varphi(\xi)$$

Ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan ko'rinadiki, ξ berilgan tenglamaning ildizi ekan. Demak bu tenglikni (3.3) formula yordamida istalgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. (3.4) Limit mavjuda bo'lgan holda iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi deyiladi. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ mavjud bo'lmasligi ham mumkin, bunday holda oddiy iteratsiya usuli maqsadga muvofiq bo'lmaydi.

1.Teorema. Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\varphi(x)$ funksiya

$$|x - x_0| \le \delta \qquad (3.5)$$

Oraliqda aniqlangan bo'lib, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy ikkita x va y nuqtalar uchun $\varphi(x)$ Lipshits shartini qanoatlantirsin:

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le q|x - y| (0 < q < 1) \qquad (3.6)$$

2) Quyidagi tengsizliklar bajarilsin:

$$|x_0 - \varphi(x_0)| \le \eta, \frac{\eta}{1-q} \le \delta \qquad (3.7)$$

U holda (3.1) tenglama (3.5) oraliqda yagona ξ ildizga ega bo'lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlik bu yechimga intiladi va intilish tezligi

$$|x_n-\xi|\le\frac{\eta}{1-q}\cdot q^n \qquad (3.8)$$

tengsizlik bilan aniqlanadi.

Isboti. Avval induksiya metodini qo'llab, ixtiyoriy n uchun x_n ni qurish mumkinligini x_n ning (3.5) oraliqda yotishligi va

$$|x_{n+1}-x_n|\le\eta\cdot q^n \qquad (3.9)$$

Tengsizlikning bajarilishini ko'rsatamiz.

Agar $n=0$ bo'lsa, $x_1=\varphi(x_0)$ bo'lgani uchun (3.9) tengsizlik (3.7) dan kelib chiqadi.

Bundan tashqari, $\eta<\frac{\eta}{1-q}\le\delta$ bo'lgani uchun $|x_1-x_0|<\delta$ tengsizlik bajarilib, x_1 (3.5) oraliqda yotadi. Endi faraz qilaylik, $x_1,x_2,x_3,\dots x_n$ lar qurilgan bo'lib, ular (3.5) oraliqda yotsin va

$$|x_{k+1}-x_k|<\eta q^k \qquad (k=0,1,2,3,\dots)$$

Tengsizliklar bajarilsin. Induksiya shartiga ko'ra x_n (3.5) da yotadi, $\varphi(x)$ (3.5) da aniqlangan, shuning uchun ham $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ ni qurish mumkin. Teoremaning 1-shartidan

$$|x_{n+1}-x_n|=|\varphi(x_n)-\varphi(x_{n-1})|\le q|x_n-x_{n-1}|$$

kelib chiqadi. Lekin x_{n-1} va x_n uchun induksiya shartiga ko'ra $|x_{n+1}-x_n|\le\eta q^{n-1}$ o'rinli, demak, $|x_{n+1}-x_n|\le\eta q^n$. Bu esa x_{n-1} va x_n uchun (3.9) tengsizlikning bajarilishini ko'rsatadi. Nihoyat,

$$|x_{n+1}-x_0|\le|x_{n+1}-x_n|+|x_n-x_{n-1}|+\dots+|x_1-x_0|\le\eta q^n+\eta q^{n-1}+\dots+\eta=\eta\frac{1-q^{n+1}}{1-q}<\frac{\eta}{1-q}\le\delta$$

ISSN 2181-3187

Munosabatlar x_{n+1} ning (3.5) oraliqda yotishini korsatadi. Shu bilan isbot qilish talab etilgan mulohaza tasdiqlanadi.

Endi x_n fundamentlat ketma-ketlik tashkil etishini ko'rsatamiz. (3.9) tengsizlikka ko'ra ixtiyoriy p natural son uchun

$$|x_{n+p}-x_n| \le |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n| \le \eta q^{n+p-1}+\ldots+\eta q^n \frac{\eta}{1-q} q^n$$

Yoki

$$|x_{n+p}-x_n| \le \frac{\eta}{1-q} q^n \qquad (3.10)$$

Bu tengsizlikning o'ng tomoni p ga bog'liq bo'lmaganligi va $0<q<1$ bo'lganidan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning fundamentalligi va uning limiti $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ mavjudligi kelib chiqadi. $\{x_n\}$ ketma-ketlik (3.5) oraliqda yotgani uchun ξ ham shu oraliqda yotadi. (3.6) shartdan $\varphi(x)$ ning uzluksizligi kelib chiqadi, shuning uchun ham $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ tenglikda limitga o'tib (3.1) tenglamaning ildizi ekanini isbotlaymiz.

Endi e ildizning (3.5) oraliqda yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, ξ (3.1) tenglamaning (3.5) oraliqdagi boshqa biror ildizi bo'lsin, $\xi=\xi$ ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham (3.6) ga ko'ra

$$|\xi-\xi| = |\varphi(\xi)-\varphi(\xi)| \le q|\xi-\xi|$$

$0<q<1$bo'lgani uchun bu munosabat faqat $\xi=\xi$bo'lganida bajariladi.

Yaqinlashish tezligini ko'rsatuvchi (3.8) tengsizlikni keltirib chiqarish uchun (3.10) tengsizlikda $p\to\infty$ limitga o'tish kifoya. Teorema isbot bo'ldi.

Misol. Iteratsiya usukli bilan

$$f(x)=x^3-80x+32 \qquad (3.11)$$

Tenglamaning musbat ildizlari 5 ta ishonchli raqam bilan topilsin.

Yechish.Shturm metodini qo'llab bu tenglamaning musbat ildizlar e1 va e2 larning mos ravishda $(0;0,5)$ va $(8,5;9)$ oraliqda yotishini ko'ramiz. Iteratsiya metodini qo'llash uchun (3.11) tenglamani kanonik ko'rinishda yozish kerak. Buni ko'p usullar bilan bajarish mumkin. Lekin har doim ham kanonik ko'rinishdagi f$\varphi(x)$ funksiya

ISSN 2181-3187

teorema shartini qanoatlantiravermaydi. (3.11) tenglamani unga ekvivalent bo'lgan quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = x^3 - 79x + 32 = \varphi_1(x) \qquad (3.12)$$

Yoki

$$x = \frac{x^3 + 32}{80} = \varphi_2(x) \qquad (3.13)$$

Yoki

$$x = \sqrt[3]{80x - 32} = \varphi_3(x) \qquad (3.14)$$

Har ikkala ildiz atrofida ham $\varphi_1(x)$ lar xosilaga ega bo'lgani uchun teoremadagi (3.6) shartni $|\varphi`_1(x)| \le q < 1$ shart bilan almashtirish mumkin. Endi $\varphi_1(x)$ larning qaysi biri teorema shartini qanoatlantirishini ko'rayli, $\varphi`_1(x) = x^3 - 79x$ bo'lgani uchun har ikkala ildiz atrofida ham $|\varphi`_1(x)| > 1$ demak, (3.12) tenglama uchun iteratsiya jarayoni uzoqlashadi. Endi (3.13) tenglamani tekshiraylik, $\varphi_2(x) = \frac{3x^2}{80}$. Bundan $(0;0,5)$ oraliqda $|\varphi`_2(x)| \le \frac{3}{320} = q < \frac{1}{100}$ ekanligini ko'ramiz, ya'ni ξ_1 ni topish uchun (3.13) tenglama iteratsiya metodini qo'llashi mumkin. Dastlabki yaqinlashishni $x_0 = 0,5$ deb olib, keying to'rttta yaqinlashishni hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{(0,5)^3 + 32}{80} = 0,4015625; \qquad x_2 = 0,4008094;$$

$$x_3 = 0,40080487; \qquad x_4 = 0,40080483;$$

Demak, 5 ta ishonchli raqam bilan $\xi_1 = 0,40080$ deb olishimiz mumkin ekan.

Tabiiyki, (3.13) tenglamada ikkinchi ildizni ham iteratsiya Metodi bilan topishga harakay qilamiz. Lekin bu mumkin emas chunki, $(8,5;9)$ oraliq uchun $|\varphi`_2(x)| \le q < 1$shart bajarilmaydi. Shuning uchun ham (3.14) tenglamani tekshirib ko'raylik:

$$\varphi`_3(x) = \frac{80}{3\sqrt[3]{(80x - 32)^2}}$$

ISSN 2181-3187

Bundan ko'ramizki, $(8,5;9)$ oraliqda ghjfksfj shu sababli (3.14) tenglamadan ξ_2 ni topishimiz mumnik.

Nolinchi yaqinlashishni $x_0 = 9$ deb olamiz, kyingi yaqinlashishlar quyidagi jadvalda keltirilgan. Demak, 5 ta ishomchli raqami bilan olingan qiymat $\xi_2 = 8,7371$ ga teng bo'ladi.

Xulosa

Oddiy iteratsiya metodi oddiy va samarali usul bo'lib, to'g'ri tanlangan kanonik shakl va boshlang'ich taxmin asosida aniq natijalar beradi. Maqoladagi misollar orqali ushbu metod yordamida algebraik tenglamalarning ildizlarini topish mumkinligi isbotlandi. Biroq metodni qo'llash uchun yaqinlashish shartlariga alohida e'tibor qaratish lozim.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Ахмедов Х.Х. Matematik analiz. – Toshkent: "Fan va texnologiya", 2016.
2. Буюкли Н.Н., Ҳамидов А.И. Numerik usullar. – Toshkent: O'zMU nashriyoti, 2008.
3. Калитевский Н. Численные методы. – Москва: Высшая школа, 2001.
4. Самойленко А.М., Геворкян А.Э. Методы приближенного решения уравнений. – Киев: Наукова думка, 1989.
5. Хомченко П.А. Краткий курс высшей математики. – Москва: Феникс, 2006.
6. Иноятов Ш.И. Matematik analiz va differensial tenglamalar. – Toshkent: TDPU, 2015.
7. Burden R.L., Faires J.D. Numerical Analysis. – Boston: Cengage Learning, 2011.