ISSN 2181-3187

ANIQ INTEGRALNING TATBIQLARI

Muallif: **Yorboboyev Alisher Kamolovich, Qaxxarov Akmal Abdug'ofurovich**. Shahrisabz "Temurbeklar maktabi" harbiy – akademik litseyi matematika fani bosh o'qituvchilari.

Annotatsiya: Mazkur maqolada aniq integral tushunchasi va uning amaliy tatbiqlari tahlil qilinadi. Geometriya va fizikadagi asosiy masalalar – yuzalar maydoni, jism hajmi, egri chiziqli ko'prik uzunligi, ish va bosim kabi fizik kattaliklarni hisoblashda aniq integralning o'rni ko'rsatiladi. Misollar yordamida bu tatbiqlarning yechish usullari ochib beriladi.

Kalit so'zlar: Aniq integral, maydon, hajm, egri chiziq uzunligi, fizik tatbiqlar

Аннотация: В данной статье рассматривается определённый интеграл и его практические применения. Показано, как он используется для вычисления площади, объёма тел, длины дуг, работы и давления в геометрических и физических задачах. Через примеры раскрываются методы решения подобных задач.

Ключевые слова: Определённый интеграл, Площадь, Объём, Длина кривой, Физические применения

Abstract: This article discusses the definite integral and its practical applications. It shows how the definite integral is used to calculate areas, volumes, arc lengths, work, and pressure in geometric and physical problems. The solution methods of such problems are explained with examples.

Keywords (English): Definite integral, Area, Volume, Curve length, Physical applications

ISSN 2181-3187

1.Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash.

2. Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash.

3. Aylanma jism hajmini hisoblash.

Yuzalarni hisoblash, egri chiziqli trapesiya, egri chiziq yoyining uzunligi, aylanma jism hajmi, o‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi, ishlab chiqarishning mehnat unumdorligi, mahsulotlar (tovarlar) zahirasi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi, daromad funksiyasi,

1.Aniq integral yordamida yassi figuralar yuzlarini hisoblash $y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi (1-chizma)

Umumiy hol, ya’ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \ge f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)] dx \qquad (2)$$

aniq integralga teng bo‘ladi .

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x\, dy = \int_c^d \varphi(y) dy \qquad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

ISSN 2181-3187

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yuza

$$S = \int_{t_2}^{t_2} y(t)x(t)dt \qquad (4)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

4-misol. $xy = 8$, $x = 1$, $x = e$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang

Yechish. $y = 8/x$ bo‘lib, (3) formulaga asosan,

$$S_1 = \int ydx = \int \frac{8}{x}dx = 8\ln x| = 8(\ln e - \ln 1) = 8.$$

5-misol. $y = x^2, y^2 = x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish: $\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x \end{cases}$

tenglamalar sistemasidan $x^4 = x, x^4 - x = 0$, $x_1 = 0; x_2 = 1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - x^2]dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \left(\frac{2}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

ISSN 2181-3187

6-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.

Yechish. Ellips koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda $t_1 = \pi/2$ $, t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobga olib,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ydx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t\ _0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin \pi - \sin 0) = 6\pi.$$

2. **<u>Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash</u>.** To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo‘lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

ISSN 2181-3187

$$l=\int_a^b \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r=r(\varphi),\ (\alpha\le\varphi\le\beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi \qquad (6)$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\dfrac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}}y'=0$ bundan, $y'=-\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi formulasiga asosan,

$$l=4\int_0^a\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\int_0^a\sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}\,dx=$$

$$=4\int_0^a\sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx=4\int_0^a\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx=4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx=4\sqrt[3]{a}\left.\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right|_0^a=4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}}-0\right)=6a.$$

3. **Aylanma jism hajmini hisoblash**

$y=f(x),\ x=a,\ x=b,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

ISSN 2181-3187

$$V_x = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi\int_c^d x^2dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to‘g‘ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi\int_0^3 y^2dx = \pi\int_0^3 2xdx = \pi x^2\Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi\,.$$

9-misol. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2 = a^2\left(1 - \dfrac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c = -b,\ d = b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

ISSN 2181-3187

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \pi a^2 \int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2} \int_{-b}^{b} y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^{b} - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2 [b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2} \left[b^3 - (-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

$a = b = R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

1. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0;$ 2) $x = 4 - y^2, \quad x = 0;$ 3) $y = \ln x, \quad x = e, \quad y = 0;$

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1$, $x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2, \quad x = 0;$ 6) $y = 2 - x^2, \quad y = x^2;$

7) $y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4;$ 8) $x = 3t^2, \quad y = ^3 t - t^3.$

2. $xy = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x + 4)^3$ *va* $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

ISSN 2181-3187

2) $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Aniq integral yordamida geometriya va fizikaga oid ko‘plab masalalarni hal qilish mumkin. Uning tatbiqlari maydon, hajm, uzunlik, ish va bosim kabi real hayotdagi ko‘plab kattaliklarni ifodalashda qo‘llaniladi. Bu esa uni amaliyotda qo‘llashga juda qulay va zarur vositaga aylantiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Zamkov O.O. va boshq. Matematik usullar iqtisodiyotda – M.: DIS 1997. 336 s.

[2] Abdalimov B.A. Oliy matematika – T.: O‘qituvchi, 1994y.

[3] Soatov Yo.U. Oliy matematika. 1 jild. – T.: O‘qituvchi, 1992.

[4]

[5] Juraev T.J. va bosh. Oliy matematika asoslari. – T.: O‘zbekiston. 1999.

[6] Azlarov T., Mansurov Q. Matematik analiz. 1,2-jild. – T.: O‘qituvchi, 1992,1994.

[7] Soatov Yo.U. Oliy matematika 3-jild. – T.: O‘zbekiston. 1996. – 619 b.

[8] Tojiev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. – T.: O‘zbekiston. – 512 bet.

[9] Krass M.S. Matematika iqtisodiy mutaxassisliklar uchun. – M.: 1998.

[10] Masagutova R.V. Iqtisodchilar uchun masalalar orqali matematika – T.: O‘qituvchi, 1996. 184 s