ISSN 2181-3187

HOSILANI AMALIY MASALALARNI YECHISHGA TADBIQI. FUNKSIYANING MONOTONLIK ORALIQLARI.

Buxoro Muhandislik Texnologiya Instituti

akademik litseyi matematika fani o’qituvchisi

Saidov Asqar Hayitnazarovich

Kalit so’zlar: Differensial, ekstrimum nuqta, funksiya funsiya, hosila, funksiya argumenti, kritik nuqta, funksiyaning monotonligi, funksiyaning uzluksizligi.

Annotatsiya: Differensial funksiyaning o’sishi va kamayishi, ekstrimumning yetarli shartlari, funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari haqida ma’lumotlar berilgan.

Ключевые слова: Дифференциал, точка экстремума, функция-функция, производная, аргумент функции, критическая точка, монотонность функции, непрерывность функции.

Аннотация: Даны сведения о росте и убывание дифференциальной функции, достаточных условиях экстремума, наибольших и наименьших значениях функции.

Key words: Differential, extremum point, function function, derivative, argument of a function, critical point, monotonicity of a function, continuity of a function.

Abstract: Information is given about the growth and decrease of the differential function, the sufficient conditions for the extremum, the largest and smallest values of the function.

Teorema: I. Differensiallanuvchi y = f(x) funksiya biror (a,b) oraliqda o‘suvchi [kamayuvchi] bo‘lsa, bu oraliqda uning hosilasi f ‘(x)≥ 0 $[f'(x) \leq 0]$shartni qanoatlantiradi.

ISSN 2181-3187

II. Agar differensiallanuvchi bo‘lgan y = f(x) funksiyaning hosilasi biror (a,b) oraliqda

f ‘(x) > 0 $[f'(x) < 0]$shartni qanoatlantirsa, unda bu (a,b) oraliqda funksiya o‘suvchi [kamayuvchi] bo‘ladi.

Masalan, f(x) = x +$\frac{1}{x}$ funksiya uchun f’(x) = 1 - $\frac{1}{x^2} > 0$ tengsizlikning yechimi $(-\infty; -1)\mathrm{U}(1; +\infty)$ sohadan iborat va shu sababli bu sohada berilgan funksiya o‘suvchi bo‘ladi. x = 0 nuqtada funksiya aniqlanmaganligini hisobga olib, bu funksiya (-1; 0) U (0;1) sohada kamayuvchi ekanligini ko‘ramiz.

Funksiya ekstremumi. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng yoki uzilishga ega bo‘ladigan nuqtalari ***kritik nuqtalar*** deyiladi.

1-Ta’rif. X_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***maksimumga*** ega deyiladi.

2-Ta’rif. X_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya $x_0$nuqtada ***minimumga*** ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga ***ekstremum nuqtalari*** deyiladi.

Ekstremumning yetarli sharti.

Birinchi qoida. X_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi

1) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini musbatdan manfiyga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya ***maksimumga***;

ISSN 2181-3187

2) x_0 nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishda $f'(x)$ o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya ***minimumga*** ega bo‘ladi.

Ikkinchi qoida. X_0 nuqtada birinchi tartibli hosila nolga teng, ikkinchi tartibli hosila noldan farqli bo‘lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va:

$f''(x_0) < 0$ bo‘lsa, ***maksimum*** nuqtasi;

$f''(x_0) > 0$ bo‘lsa, ***minimum*** nuqtasi bo‘ladi

1-misol: f(x) $=\frac{1}{3}\cdot x^3-\frac{1}{2}\cdot x^2-6x+2\frac{2}{3}$ funksiyaning ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish: Kritik nuqtalarni topamiz.

f’(x) = $x^2 - 6$, $x^2 - x - 6$, bunda $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1\pm 5}{2}$ bo’lib, x_1 =-2, x_2 = 3 bo’ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o’tishida funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz.

f’(x) = x^2 –x – 6 = (x+2)(x – 3), x<-2 bo’lsa, x+2<0, x-3<0 bo’lib, (x+2)(x-3)>0 bo’ladi, ya’ni ishora musbat (+). X>-2 bo’lsa, x+2>0; x-3<0, (x+2)(x-3)<0, ya’ni ishora manfiy (-). Demak, x_1 = -2 nuqtadan o’tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o’zgaradi.. Birinchi qoidaga asosan x_1=-2 nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo’ladi.

$y_{max}=\frac{1}{3}(-2)^3-\frac{1}{2}(-2)^2-6(-2)+\frac{8}{3}=10$

Endi -2<x<3 bo’lsa,(x+2)>0; (x-3)<0 bo’lib, (x+2)(x-3)<0, hosilaning ishorasi manfiy (-), x>3 bo’lsa,(x=2)>0; (x-3)>0 bo’lib, (x+2)(x-3)>0, musbat (+) bo’ladi.

ISSN 2181-3187

Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o'tishda funksiya hosilasi ishorasini manfuydan musbatga o'zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$Y_{min}=\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{1}{2}3^2-6\cdot 3+\frac{8}{3}=-\frac{65}{6}$

2-misol: $f(x)=\frac{1}{4}\cdot 3^3-2x^3+\frac{11}{2}\cdot x^2-6x+\frac{9}{4}$ funksiyaning ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish; Birinchi va ikkinchi tartibli hosilslsrni topamiz.

$F'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $f''(x) = 3x^2 - 12x + 11$

Endi kritik nuqtalarni topaylik.

$X^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) = (x-1)(x^2-5x+6)$,

$X^2 - 5x + 6 = 0$, $x - 1 = 0$

Bundan, $x = 1$ va $x_{2,3} = \frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2} = \frac{5\pm 1}{2}$; $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo'ladi.

Demak, kritik nuqtalar: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ bo'ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$F''(1) = 3\cdot 1^2 - 12\cdot 1 + 11 = 2 > 0$

$f''(1) = 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 11 = -1 < 0$

$F''(1) = 3\cdot 3^2 - 12\cdot 3 + 11 = 2 > 0$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo'lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1 = 1$, $x_3 = 3$ nuqtalarda minimum, $x_2 = 2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi.

min f(1) = 0; max f(2) = 0,25; minf(3) = 0

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

ISSN 2181-3187

Y = f(x) funksiyaning [a,b] kesmadagi eng kichik eng katta qiymatlarini toppish uchun;

1) Kritik nuqtalarni topamiz;
2) Funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;
3) Bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

Misol: y=f(x) = $x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning [-2;3] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish: Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$Y' = 4x^3 - 4x$, $4x^3 - 4x = 0$, $4x(x^2 - 1) = 0$, bundan $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ kritik nuqtalar bo'ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini

$$F(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 + 5 = 16 - 8+5 = 13$$

Hisoblaymiz: $f(-1) = 4$; $f(0) = 5$; $f(1) = 4$ va $f(3) = 3^4 - 2 \cdot 3^2 + 5 = 81-18+5 = 68$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning [-2;3)] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{ekichik}$, = 4, $y_{e\ katta}$ = 68 bo'ladi.

Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;

2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;

3) funksiyaning davriyligini aniqlash;

4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;

5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;

6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;

7) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;

8) imkoniyati bo‘lsa funksiya grafigining koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;

9) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini yasash.

Adabiyotlar ro’yxati

1. Jo‘raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-2-tom. T.: «O‘zbekiston». 1995, 1999 y.

2. Tojiev Sh.I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. T.: «O‘zbekiston». 2002 y.

3. O‘rinboeva L.O‘. Matematika. O‘quv qo‘llanma. T. “InnovatsiyaZiyo”, 2020.312 b.

4. Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, Printed in the United States of America, 2010.

5. Mirziyoev Sh.M. Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent, “O‘zbekiston”, 2017 yil, 488 bet.

6. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.Sh. ”Matematika” – Gumanitar yo‘nalishlar talabalari uchun o‘quv qo‘llanma. T.: ”Jahon-Print” 2007y.