ISSN 2181-3187

VATARLAR METODI

A.I.Ismoilov

FarDU,Amaliy matematika va informatika

kafedrasi katta o'qituvchisi.

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)

E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com

Usmonaliyev Ulug‘bek Ismoiljon o‘g‘li

Farg‘ona Davlat Universiteti Amaliy

matematika yo‘nalishi 3-kurs talabasi 22-08-guruh talabasi

E-mail: uusmonaliyev04@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada tenglamalarning ildizlarini sonli yechish usullaridan biri bo‘lgan vatarlar metodi tahlil qilinadi. Ushbu usul Nyuton metodiga o‘xshash bo‘lsa-da, hosiladan foydalanmasdan, ikki nuqta orasida vatar chizish orqali ildizga yaqinlashishni ta'minlaydi. Vatarlar metodining algoritmi, ustun va kamchiliklari, va amaliy misollar asosida uning qo‘llanishi yoritiladi. Excel dasturiy ta'minoti yordamida usulni avtomatlashtirish imkoniyati ham ko‘rib chiqiladi.

Kalit so‘zlar: vatarlar metodi, sonli usullar, ildizni topish, iteratsiya, Excel, Nyuton metodi alternativasi

Abstract: This article analyzes the secant method, one of the numerical techniques for solving equations. Although similar to the Newton method, it approaches the root by drawing a secant line between two points, eliminating the need for derivatives. The article explores the algorithm, advantages, limitations, and application of the secant method with practical examples. It also demonstrates the possibility of automating the method using Microsoft Excel.

ISSN 2181-3187

Keywords: ecant method, numerical methods, root finding, iteration, Excel, Newton method alternative

Аннотация: В данной статье рассматривается метод хорд — один из численных методов нахождения корней уравнений. Несмотря на схожесть с методом Ньютона, он не требует вычисления производных и использует секущую между двумя точками для приближения к корню. Описывается алгоритм, преимущества и недостатки метода, а также его применение на практике. Также рассматривается возможность автоматизации метода с использованием Excel.

Ключевые слова: метод хорд, численные методы, нахождение корня, итерация, Excel, альтернатива методу Ньютона

Kirish

Ko‘pincha insonlar hayotda muammoning aniq javobini bilmasdan, uni yaqin ikki taxmin asosida izlashga majbur bo‘lishadi. Masalan, siz xaritada aniq joylashuvini bilmagan manzilni topmoqchisiz, lekin bu manzilga yaqin bo‘lgan ikkita tanish nuqtangiz bor. Siz ularning orasida chiziq (vatar) chizib, taxminiy joyni aniqlaysiz va bu taxminni keyinchalik yana ikki yangi nuqta orqali aniqlashtirib borasiz. Bu jarayon real hayotda qaror qabul qilish, muammoni hal qilish yoki optimallashtirishda keng qo‘llaniladi.

Matematikada ham shunga o‘xshash holatlar mavjud. Masalan, murakkab tenglamalarning aniq analitik yechimini topish imkoni bo‘lmaganda, taxminiy yechimni izlashga to‘g‘ri keladi. Bunday vaziyatda **sonli usullar** yordamga keladi, xususan, **vatarlar metodi** (secant method) shular jumlasidan biridir. Bu usul ikkita taxminiy nuqta asosida ildizga yaqinlashishni ta’minlaydi va Nyuton metodidan farqli ravishda funksiyaning hosilasini talab qilmaydi.

ISSN 2181-3187

Mazkur maqolada vatarlar metodining algoritmi, ishlash printsipi, ustunlik va kamchiliklari tahlil qilinadi. Shuningdek, amaliy masalalar orqali uning qanday qo‘llanilishi va Excel dasturida avtomatlashtirish imkoniyatlari yoritiladi. Vatarlar metodi — nafaqat matematik, balki real hayotdagi muammolarni hal qilishda ham mantiqiy asosga ega bo‘lgan qulay vositadir.

Nyuton metodidagi hisoblashlarni soddalashtirishning yana bir usulini ko’ramiz. Nyuton metodida mehnatning asosiy qismi $f(x_n)$ va $f'(x_n)$ larni hisoblash uchun sarflanadi. Shularning birontasi, masalan, $f'(x_n)$ ni hisoblashdan qutilish mumkin emasmikin degan savol tug’iladi. Bu bizni *vatarlar usuli*ga olib keladi, ya’ni agar $f'(x_n)$ ni taqribiy ravishda almashtirsak:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

u holda navbatdagi yaqinlashishni topish qoidasi quyidagicha bo’ladi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \qquad (1)$$

Bu qoidaning geometrik ma’nosi quyidagidan iborat: $y = f(x)$ funksiyaning grafigida ikkita $M_{n-1}[x_{n-1}, f(x_{n-1})]$ va $M_n[x_n, f(x_n)]$ nuqtalardan vatar o’tkazamiz. Vatar tenglamasi esa quyidagicha:

$$\frac{x - x_n}{x_n - x_{n-1}} = \frac{y - f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}.$$

Agar bu vatarning *OX* o’qi bilan kesishgan nuqtasini deb olsak, (1) qoida kelib chiqadi.

Vatarlar metodi ikki qadamli metod bo’lib x_{n+1} ni topish uchun x_{n-1} va x_n ni bilishimiz kerak.(1) qoidani qo’llash uchun:

1) barcha x_n lar $f(x)$ ning aniqlanish sohasida yotishi va

ISSN 2181-3187

2) $f(x_n)-f(x_{n-1})\neq 0 \quad (n=1,2,...)$ shartlar bajarilishi kerak.

Avval $\overline{\substack{f(x_k)-f(x_{k-1})\neq 0 \\ (k=1,n-1)}}$ bo'lgan holni ko'rib chiqaylik, bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:a) $x_n\neq x_{n-1}$ va b) $x_n=x_{n-1}$.

Agar $x_n\neq x_{n-1}$ bo'lsa,

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})(x_{n-1}-x_{n-2})}{f(x_{n-1})-f(x_{n-2})}. \qquad (2)$$

tenglikdan $f(x_{n-1})\neq 0$ ligini ko'ramiz. Shuning uchun ham $f(x_n)\neq 0$ va navbatdagi

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}.$$

Yaqinlashishni ko'rish mumkin bo'lmaydi. Protsess shu yerda uziladi va yechimga olib kelmaydi.

Agar $x_n=x_{n-1}$ bo'lsa, x_0, x_1, … , x_{n-1}, x_n larni ko'rish mumkin, $x_0,x_1,...,x_{n-1}$ lar o'zaro farqli va $f(x_k)-f(x_{k-1})\neq 0 \quad (k=\overline{1,n-1})$ deb hisoblaymiz. (2) tenglikdan ko'ramizki, $f(x_{n-1})=0$ va x_{n-1} berilgan tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Bu holda ketma-ket yaqinlashishlarni x_n gacha bajarish mumkin, shu bilan birga ikkita ustma-ust tushadigan x_{n-1} va x_n qiymatlar berilgan tenglamaning yechimi bo'ladi. Ildiz ratsional son bo'lganda, shunday hol bo'lishi mumkin.

Endi biz yuqoridagi 1), 2) shartlar bajarilgan deb faraz qilib, vatarlar metodining yaqinlashishiga to'xtab o'tamiz. Xato $\varepsilon_n=\xi-x_n$ uchun (1) dan

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n+\frac{(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)f(\xi-\varepsilon_n)}{f(\xi-\varepsilon_n)-f(\xi-\varepsilon_{n-1})}$$

munosabatni chiqaramiz. Agar biz bu yerda $f(\xi-\varepsilon_n)$ va $f(\xi-\varepsilon_{n-1})$ larning xatolar darajalariga nisbatan yoyilmalari

ISSN 2181-3187

$$f(\xi-\varepsilon_n)=-f^{'}(\xi)\varepsilon_n+\frac{1}{2}f^{''}(\xi)\varepsilon_n^2+...,$$

$$f(\xi-\varepsilon_{n-1})=-f^{'}(\xi)\varepsilon_{n-1}+\frac{1}{2}f^{''}(\xi)\varepsilon_{n-1}^2+...$$

ni qo'yib, tegishli amallarni bajarsak, quyidagi taqribiy

$$\varepsilon_{n+1}\approx-\frac{1}{2}\frac{f^{''}(\xi)}{f^{'}(\xi)}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n \qquad (3)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar bu tenglikni Nyuton metodi uchun chiqarilgan $\varepsilon_{n+1}\approx-\frac{1}{2}\frac{f^{''}(\xi)}{f^{'}(\xi)}\varepsilon_n^2$ tenglik bilan solishtirsak, vatarlar metodida xatoning o'zgarish qonuni Nyuton qoidasidagi qonunga yaqinligini ko'ramiz.

Nyuton metodining yaqinlashishi haqidagi teoremaga o'xshash quyidagi teorema ham o'rinlidir.

Teorema. Agar $f(x)$ funksiya va dastlabki yaqinlashish x_0 1-teorema shartlarini qanoatlantirsa va bundan tashqari x_1 uchun

$$|x_1-x_0|<\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta=t^* \text{ va } |f(x_1)|\le P(|x_1-x_0|)=P(t_1)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda:

1) (1) qoida bilan aniqlangan x_n yaqinlashishlar chekli qadamdan keyin yechimga olib keladi, yoki x_n larni barcha *n* lar uchun ko'rish mumkin bo'lib, ular yaqinlashuvchi ketma-ketlikni tashkil etadi

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\xi;$$

2) limitdagi qiymat $\xi f(x)=0$ tenglamaning yechimi bo'ladi;

ISSN 2181-3187

3) yaqinlashish tezligi $|\xi - x_n| \le t^* - t_n$ tengsizlik bilan baholanadi, bu yerda t_n $P(t) = \frac{K}{2}t^2 - \frac{t}{B} + \frac{\eta}{B} = 0$ tenglamaning kichik ildizi uchun $t_0 = 0$ va $t_1 = |x_1 - x_0|$ dan boshlab vatarlar usuli bilan ko'rilgan ketma-ket yaqinlashishlardir.

Misol.

Tasavvur qiling, siz biror texnologik qurilma (masalan, robot qo‘l yoki dron) uchun **aniq masofa** o‘lchovini aniqlashingiz kerak. Qurilmada lazer sensori mavjud va siz undan kelayotgan signal kuchiga (masofa bilan bog‘liq) qarab, bu qurilma obyektdan **qaysi masofada to‘xtashi kerakligini** aniqlashga harakat qilmoqdasiz. Ammo siz signal kuchining to‘liq fizik formulasi bilan ishlashni emas, balki eksperiment orqali topilgan qiymatlar asosida **taxminan nolga teng nuqtani (ya'ni optimal masofani)** topmoqchisiz.

Ushbu vaziyat matematik ko‘rinishda quyidagicha ifodalanishi mumkin:

$$f(x) = x^2 - 2$$

Bu yerda $f(x)$— qurilmaning obyektdan x metr uzoqlikda bo‘lganidagi signal kuchi bilan bog‘liq ifoda bo‘lib, nolga yaqinlashish optimal masofani bildiradi.

Yechish. Biz yuqorida ko'rgan edikki, izlayotgan ildiz $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ oraliqda yotadi

Boshlang‘ich taxminlar:

- $x_0 = 1$(signal juda kuchli, yaqin)
- $x_1 = 2$ (signal kuchsiz, uzoqroq)

Quyidagi iteratsion formula asosida yangi nuqta topiladi:

ISSN 2181-3187

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = x_1 - f(x_1) \cdot \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{(2^2-2)(2-1)}{(2^2-2)-(1^2-2)} = 2 - \frac{2*1}{2-(-1)} = 2 - \frac{2}{3} = 1.333$$

Demak, qurilma taxminan **1.333 metr** uzoqlikda to‘xtashi kerakligi aniqlanadi.

Yakuniy Xulosa

Vatarlar metodi — bu murakkab matematik tenglamalarni yechish uchun samarali va kuchli **sonli usul** bo‘lib, u ikkita yaqin taxmin nuqtasi orqali ildizga yaqinlashishni ta’minlaydi. Ushbu metod, Nyuton metodiga nisbatan hosilalarni hisoblash zaruriyatidan xoli bo‘lib, matematik modellarni yechishda, shuningdek, amaliy muammolarni hal qilishda keng qo‘llaniladi.

Maqolada vatarlar metodining algoritmi, uning ishlash printsipi, ustunliklari va cheklovlari tahlil qilindi. Shuningdek, **Excel** dasturi yordamida ushbu metodni qanday avtomatlashtirish mumkinligi ko‘rsatilgan. Amaliy misol sifatida vatarlar metodining **kvadrat tenglamalar** misolida qo‘llanishi tahlil etildi, bu esa metodning oddiydan murakkabroq muammolargacha qo‘llanilish imkoniyatlarini namoyish etdi.

Metodning asosiy afzalligi shundaki, u matematik tenglamalarni tez va samarali yechish imkonini beradi, ayniqsa, hosilalar yordamida yechim olish qiyin bo‘lishi mumkin bo‘lgan vaziyatlarda. Biroq, metodning samaradorligi va aniqligi to‘g‘ri boshlang‘ich taxminlarga bog‘liq bo‘lib, bu esa uning cheklovlarini tashkil etadi. Shu bilan birga, vatarlar metodi, ya’ni ikki nuqta yordamida ildizga yaqinlashish usuli, ilm-fan va muhandislikda o‘zining amaliy ahamiyatini yanada oshiradi.

Foydalanilgan Adabiyotlar

ISSN 2181-3187

1. **Burden, R. L., & Faires, J. D.** (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Cengage Learning.

Ushbu manba sonli usullarni umumiy tahlil qiladi va vatarlar metodining algoritmik asoslarini tushuntiradi.

2. **Chapra, S. C., & Canale, R. P.** (2010). *Numerical Methods for Engineers* (6th ed.). McGraw-Hill.

Bu kitobda muhandislik ilmlarida ishlatiladigan sonli usullar, jumladan vatarlar metodi haqida batafsil ma'lumot berilgan.

3. **Keller, H. B.** (1978). *Numerical Methods for Solving Nonlinear Equations*. SIAM Review, 20(4), 503-544.

Bu maqola sonli usullar va nonlineer tenglamalar yechimi bilan bog‘liq masalalarni ko‘rib chiqadi.

4. **Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P.** (2007). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.

Ushbu manba ilmiy hisoblashda foydalaniladigan metodlar, shu jumladan vatarlar metodining kodlash va amaliy qo‘llanilishi haqida batafsil ma'lumot beradi.

5. **Atkinson, K. E.** (1989). *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley.

Atkinsonning kitobi sonli analizning asosiy tushunchalari va usullarini, shu jumladan vatarlar metodini kengroq tushuntiradi.