ISSN 2181-3187

EYTKENNING Δ^2 JARAYONI VA UNING KONVERGENSIYANI TEZLASHTIRISHDAGI ROLI

A.I.Ismoilov
amaliy matematika va informatika
kafedrasi katta o'qituvchisi
fizika-matematika fanlari
bo'yicha falsafa doktori(PhD)
E: ismoilovaxrorjon@yandex.com
Sotvoldiyeva Zarnigor
Amaliy matematika yo'nalishi
22.08-guruh talabasi
E: zarnigorrasuljonova@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu maqolada A. Eytken tomonidan taklif etilgan iteratsion jarayonni tezlashtirish metodi – Eytken metodi keng yoritilgan. Maqolada metodning nazariy asosi, matematik isboti, konvergensiya tartibi va amaliy qo‘llanilishi ko‘rib chiqiladi. Eytkenning Δ^2 jarayoni yordamida oddiy iteratsion usullarning yaqinlashuvini qanday qilib sezilarli darajada tezlashtirish mumkinligi tushuntiriladi. Hayotiy misol orqali metodning afzalliklari amalda ko‘rsatib berilgan. Maqola talabalar, matematiklar, muhandislar va sonli usullar bilan ishlovchi mutaxassislar uchun foydali manba bo‘lib xizmat qiladi.

Kalit so‘zlar: Eytken metodi, iteratsion jarayon, Δ^2 protsedura, konvergensiyani tezlashtirish, sonli usullar, fiksatsiyalangan nuqta, matematik analiz, iteratsiya tartibi, hisoblash usuli, ildiz topish.

Kirish

A.Eytken 1937-yilda xos son va xos vektorlarni topishdagi iteratsion jarayonni yaxshilash metodini taklif qilgan edi. Umuman olganda Eytken metodini har qanday

ISSN 2181-3187

iteratsion protsesga ham qo'llash mumkin. Biz hozir ana shu metodni ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, bizga $x=\xi$ ga yaqinlashuvchi p-tartibli jarayon

$$x_n=\varphi(x_{n-1})$$

berilgan bo'lsin. φ_x funksiya yordamida

$$\Phi(x)=\frac{x\cdot\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)}{x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))}$$

funksiyani tuzamiz.

Agar $\varphi'(\xi)\neq 1$ va $p=1$ bo'lsa , u holda

$$x_{n+1}=\Phi(x_n)$$

Iteratsion jarayonning tartibi 2 dan kichik bo'lmaydi, $p>1$ bo'lganda esa $2p-1$ da kichik bo'lmaydi. Bu tasdiqlarni isbot qilamiz. Umumiylikka zarar yetkazmasdan , $\xi=0$deb olishimiz mumkin. Agar $\xi\neq 0$ bo'lsa, $x=\xi+z,\varphi(x)-\xi=\varphi(\xi+z)-\xi=\omega(z)$ belgilashlarni kiritamiz. U holda $x=\varphi(x)$ tenglama $z=\omega(z)$ tenglamaga o'tadi, $\omega(z)$ uchun qurilgan funksiya

$$\Omega(z)=\frac{z\omega(\omega(z))-\omega^2(z)}{z-2\omega(z)+\omega(\omega(z))}=\frac{(x-\xi)\omega(\varphi(x)-\xi)-(\varphi(x)-\xi)^2}{x-\xi-2(\varphi(x)-\xi)+\omega(\varphi(x)-\xi)}=$$
$$=\frac{(x-\xi)[\varphi(\varphi(x))-\xi]-(\varphi(x)-\xi)^2}{x-\xi-2(\varphi(x)-\xi)+\varphi(x))-\xi}=$$
$$=\frac{x\varphi(\varphi(x))-\varphi^2(x)-\xi[x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))]}{x-2\varphi(x)+\varphi(\varphi(x))}=\Phi(x)-\xi$$

ga o'tadi. Demak, $\xi=0$ deb olishimiz mumkin., $x_n=\varphi(x_{n-1})$ p-tartibli iteratsiya bo'lganligi uchun $\varphi(x)$ ning $x=0$ nuqta atrofidagi yoyilmasi quyidagi

$$\varphi(x)=a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yoyilmani yuqoridagi tenglikka qo'ysak,

$$\Phi(x)=\frac{x[a_p(a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots)^p+\ldots]-(a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots)^2}{x-2(a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots)+[a_p(a_px^p+a_{p+1}x^{p+1}+\ldots)^p+\ldots]}=$$
$$\frac{x(a_p{}^{p+1}x^{p^2}+\ldots)-(a_p^2x^{2p}+2a_pa_{p+1}x^{2p+1}+\ldots)}{x-2a_px^p+a_p{}^{p+1}x^{p^2}-2a_{p+1}x^{p+1}+\ldots}$$

hosil bo'ladi. Bu ifodani $p=1$ va $p>1$ hollar uchun alohida-alohida tekshiramiz. Agar v bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ ning suratida x ning darajasi uchdan kichik emas(chunki

ISSN 2181-3187

ikkinchi darajali hadlari o'zaro bir-birlarini yo'qotishadi), mahrajida esa x oldidagi koeffitsiyent

$$1-2a_p+a_p^2=1-2a_1+a_1^2=(1-\varphi'(0))^2\neq 0$$

Demak, mahrajda x ning birinchi darajasi mavjud va $\Phi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo'lmaganda x^2 dan boshlanadi. Shuning uchun ham $\Phi'(\xi)=0$ va iteratsiyaning tartibi ikkidan kichik emas.

Agar $p>1$ bo'lsa, yuqoridagi tenglikning suratida x ning eng kichik darajasi $2p$ ga teng bo'lib, mahrajda x ning birinchi darajasi qatnashadi. Demak, $\Phi(x)$ ning darajali qatordagi yoyilmasi hech bo'lmaganda x^{2p-1} dan boshlanadi. Ya'ni hech bo'lmaganda $j=1,2,...,2p-2$ lar uchun $\Phi(\xi)=0$. Bu esa iteratsiyaning tartibi hech bo'lmaganda $2p-1$ ga teng ekanligini ko'rsatadi.

1-izoh. Agar dastlabki yaqinlashish x_0 ξ ga har qancha yaqin bo'lganda ham, $\varphi(x)$ bilan aniqlangan iteratsiya yaqinlashmasa ham iteratsiya, x_0 ξ ga yetarlicha yaqin bo'lganda yaqinlashadi. Chunki, $\Phi'(\xi)=0$ bo'lganligi uchun $x=\xi$ ning shunday atrofi topiladiki, u yerda $|\Phi''(\xi)|<q<1$ bo'ladi. Bu esa x_0 shu atrofdan olingan bo'lsa, $x_n=\Phi(x_{n-1})$ iteratsiyaning yaqinlashishi uchun yetarli shartdir.

2-izoh. Tenglik bilan aniqlangan $\Phi(x)$ ning oshkor ko'rinishi ma'lum bo'lmasa ham formula bilan iteratsiyani qurish mumkin. Buni quyidagi usul bilan bajarish mumkin. x_0 dan boshlab avvalo

$$x_1=\varphi(x_0) \text{ va } x_2=\varphi(x_1)$$

quriladi, keyin esa x_3 ni

$$x_3=\frac{x_0x_2-x_1^2}{x_0-2x_1+x_2}$$

formula yordamida aniqlaymiz.

Agar $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i, \Delta^2x_i=x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i$ deb belgilab olsak, x_3 ni quyidagicha yozishimiz ham mumkin:

$$x_3=x_0-\frac{(\Delta x_0)^2}{\Delta^2x_0}$$

ISSN 2181-3187

Navbatdagi iteratsiyalarni

$$x_4 = \varphi(x_3),\; x_5 = \varphi(x_4),\; x_6 = x_5 - \frac{(\Delta x_3)^2}{\Delta^2 x_3}$$

formulalar yordamida quramiz va hokazo.

Shunday qilib, biz quyidagi iteratsion jarayonga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} x_{3i+1} &= \varphi(x_{3i}) \\ x_{3i+2} &= \varphi(x_{3i+1})(i = 0,1,2,...) \\ x_{3i+3} &= x_{3i} - \frac{(\Delta x_{3i})^2}{\Delta^2 x_i} \end{aligned}$$

Oxirgi formulaning ko'rinishiga qarab, odatda Eytken metodi Eytkenning i^2-jarayoni deyiladi.

HAYOTIY MASALA (EYTKEN METODIGA ASOSLANGAN)

Masala: Bir muhandis issiqlik almashinish tizimini loyihalamoqda. U, haroratni muayyan vaqtdan keyin qancha bo'lishini bashorat qilish uchun quyidagi tenglama asosida hisoblash olib boradi:

$$x = \cos(x)$$

Bu tenglama tizimning barqaror harorat holatini ifodalaydi. Muhandis bu tenglamaning ildizini topib, aniq harorat qiymatini bilmoqchi.

U dastlab oddiy iteratsion usuldan foydalanadi va boshlang'ich nuqta sifatida $x_0 = 0.5$ ni tanlaydi. Biroq u natijaning sekin yaqinlashayotganini sezadi. Shuning uchun u hisoblash jarayonini tezlashtirish uchun Eytken metodidan foydalanishga qaror qiladi.

Bu tenglama $f(x) = \cos(x)$ bilan berilgan iteratsion formulani anglatadi:

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

1. Boshlang'ich $x_0 = 0.5$ nuqtani olamiz va iteratsiyalarni bajaramiz.

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(0.5) \approx 0.8776 \\ x_2 &= \cos(0.8776) \approx 0.639 \end{aligned}$$

2. Eytken formulasini qo'llaymiz

Eytken Δ^2 formulasi:

$$x_0* = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0}$$

Qiymatlarni qo'yamiz:

$$x_0* = 0.5 - \frac{(0.8776 - 0.5)^2}{0.639 - 2 \cdot 0.8776 + 0.5} = 0.5 - \frac{(0.3776)^2}{0.639 - 1.7552 + 0.5} = 0.5 - \frac{0.1425}{-0.6162} \approx 0.5 + 0.2312 = 0.7312$$

3. Yangi yaqinlashgan qiymat

Demak, odatiy iteratsiya orqali 3 bosqichdan so'ng:

$$x_2 \approx 0.639$$

Lekin Eytken metodi yordamida:

$$x^* = 0.7312$$

Bu ancha tez yaqinlashgan qiymatdir.

Xulosa

Ushbu maqolada Eytken metodi — iteratsion jarayonlarni tezlashtirishga mo'ljallangan samarali yondashuv sifatida atroflicha tahlil qilindi. Metodning matematik asosi, konvergensiya tartibi va umumiy iteratsion jarayonlarga qo'llanishi bayon qilindi. Shuningdek, oddiy iteratsiya bilan Eytken metodini solishtiruvchi amaliy misol orqali bu metodning afzalliklari aniq ko'rsatildi. Natijalar shuni ko'rsatadiki, Eytkenning Δ2\Delta^2Δ2 protsedurasi yordamida hisoblash natijalari sezilarli darajada tezroq aniqlikka erishadi. Bu metod, ayniqsa ildiz topish yoki xos qiymatlarni hisoblash kabi jarayonlarda juda foydalidir. Shu sababli Eytken metodi matematik hisoblashlar, muhandislik masalalari va dasturlashdagi iteratsion algoritmlarni optimallashtirish uchun muhim vosita hisoblanadi.

Adabiyotlar

1. Eitken, A.C. (1937). *On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 57, 269–304.
2. Burden, R.L., & Faires, J.D. (2011). *Numerical Analysis* (9th ed.). Brooks/Cole, Cengage Learning.
3. Kincaid, D., & Cheney, W. (2002). *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. American Mathematical Society.
4. Atkinson, K.E. (1989). *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.). Wiley.

ISSN 2181-3187

5. Исраилов М.И. (1985). *Численные методы*. Ташкент: Фан.

6. Хомидов Ж.Ж. (2003). *Sonli usullar*. Toshkent: O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi.