ISSN 2181-3187

INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH(TO'GRI TO'RTBURCHAK, TRAPETSIYA SIMPSON FORMULASI).

Axrorjon Ismoilov amaliy matematika
va informatika kafedrasi katta o'qituvchisi.
fizika-matematika fanlari bo'yicha
falsafa doktori(PhD)
ismoilovaxrorjon@yandex.com
Mamazokirov Doniyorbek Karimjon o'g'li
fizika-matematika fakulteti amaliy matematika
yo'nalishi 3-bosqich talabasi.
mamazokirovdoniyorbek@gmail.com

Annotatsiya

Maqola aniq integrallarni taqribiy hisoblashning uchta asosiy usulini – to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson (parabolalar) formulalarini ko'rib chiqadi. N'yuton-Leybnits formulasidan foydalanish imkonsiz bo'lgan hollarda, ya'ni funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish qiyin yoki elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydigan bo'lsa, ushbu usullar qo'llaniladi. To'g'ri to'rtburchaklar usuli integral yuzasini zinapoyasimon shakllar yig'indisi sifatida, trapetsiyalar usuli to'g'ri chiziqli trapetsiyalar yuzasi sifatida, Simpson usuli esa parabolik trapetsiyalar yuzasi sifatida hisoblaydi. Har bir usulning matematik asoslari, formulalari va xatolik darajasi tahlil qilinadi. Hayotiy misol sifatida shamol turbinasining quvvatini hisoblash masalasi keltiriladi. Maqola bo'linish nuqtalarining sonini ko'paytirish orqali aniqlikni oshirish mumkinligini ta'kidlaydi.

Kalit so'zlar: aniq integral, taqribiy hisoblash, to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar, Simpson formulasi, N'yuton-Leybnits, parabolik trapetsiya, xatolik, bo'linish qadami, shamol quvvati.

Kirish

ISSN 2181-3187

Berilgan [a,b] kesmada uzluksiz bo`lgan f(x) funksiya uchun F(x) boshlang`ich funksiyani topish mumkin bo`lsa, N`yuton Leybnits formulasi bo`yicha $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralni hisoblagan edik. Lekin har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang`ich funksiyasini hamma vaqt topish qiyin, bazi hollarda esa boshlang`ich funksiyani elementar funksiyalar orqali ifodalab bo`lmaydi.

Masalan.

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \frac{\cos x}{x}dx,\ \int \ell^{-x^2}dx,\ \int \sin x^2 dx,\ \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}dx,\ \int \frac{dx}{\ln x},.$$

Bunday hollarda N`yuton Leybnits formulasidan foydalana olmaymiz. Shuning uchun ularni taqriban bo`lsa ham hisoblashga to`g`ri keladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblaydigan bir qancha usullar mavjud. Ushbu paragrifda ulardan uchtasini: to`g`ri to`rtburchaklar, trapetsiyalar hamda parabola (Sinpson) usullarini keltiramiz.

To`g`ri to`rtburchaklar usuli

f(x) funksiya [a,b] segmentda berilgan va uzluksiz bo`lsin. Bu funksiyaning aniq integral $\int_a^b f(x)dx$ ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz.

Hisoblashlarda aniq integralni yuzini ifodalovchi yig`indi limiti deb, ya`ni $\int_a^b f(x)dx \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi)(x_i - x_{i-1})$ (1) ko`rinishda mulohaza yuritiladi.

[a,b] kesmani $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b$ nuqtalar bilan teng **n** ta bo`lakka bo`lamiz . Har birining uzunligini $h = \frac{b-a}{n}, x_i = a + ib(i = \overline{0,n})$ deb olamiz.

ISSN 2181-3187

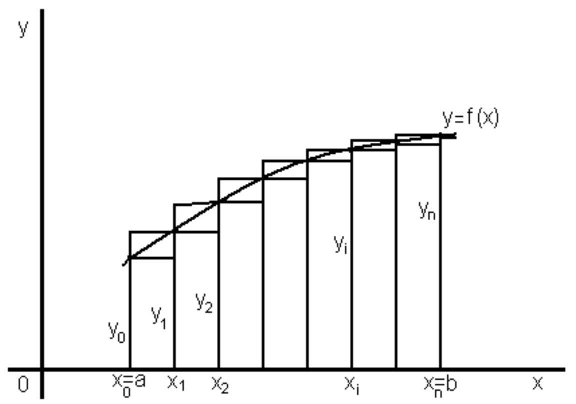
$x = x_i$ bo`lganda f(x) funksiya qiymatlarini $y_i = f(x_i) = f(a+ih)$ (2) deb belgilaymiz.

(1) fomulaning o`ng tomonidagi yig`indini $\xi_i = x_{i-1} yoki x_i deb,$ quyidagi ikkita formulani hosil qilamiz:

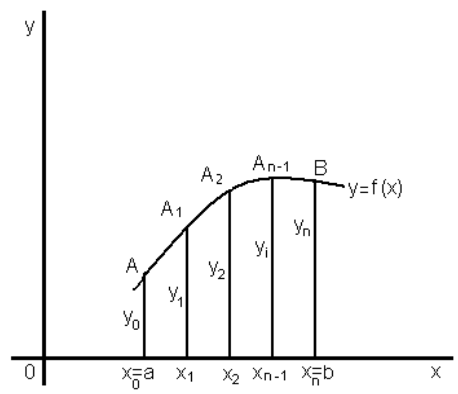
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}], \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + ... + y_n], \quad (4)$$

(3) va (4) formulallarga aniq integralni taqribiy hisoblashning to`g`ri to`rtburchaklar formulasi deyiladi.



11-chizma



12-chizma

11-chizmada quyidagilar tasvirlangan: agar f(x) musbat va o`suvchi funksiya bo`lsa, u holda (3) formula “ichki” to`g`ri to`rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklning yuzini tasvirlaydi. (4) formula esa “tashqi” to`rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklining yuzini tasvirlaydi. Integrlni to`g`ri to`rtburchaklar formulasi bilan hisoblashda qilingan xato n son qancha katta (ya`ni bo`linish qadami h qancha

ISSN 2181-3187

kichik) bo`la borishi bilan (3) va (4) formulalar aniqroq bo`la boradi, ya`ni $n \to \infty$ da va $h \to \infty$ da ular aniq integralning haqiqiy qiymatini beradi.

Trapetsiyalar formulasi

Agar ordinatalar chizig`ining egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini zinapoyali siniq chiziqlar bian emas , balki ichki chizilgan siniq chiziqlar bilan tutashtirsak (3) va (4) formulalarga nisbatan xatosi kamroq bo`lgan taqribiy formulani keltirib chiqaramiz: (12-chizma).

Bu holda egrai chiziqli aABb trapetsiyaning yuzi yuqoridan $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}B$ vatarlar bilan chegaralangan to`g`ri chiziqli trapetsiyalar yuzlarining yig`indisiga teng bo`ladi. Natijada trapetsiyalar formulasini hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+....+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right]=$$
$$h\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+....+y_{n-1}\right](5),$$

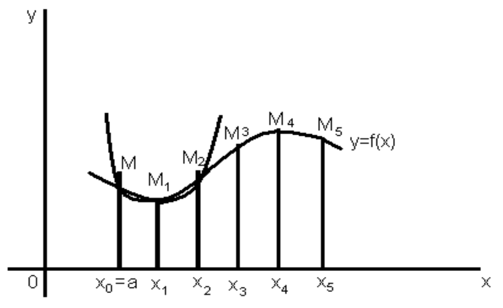
bunda $h=\dfrac{b-a}{n}, x_i=x_{i-1}+h, (i=\overline{1,n}), x_0=a, x_n=b.$

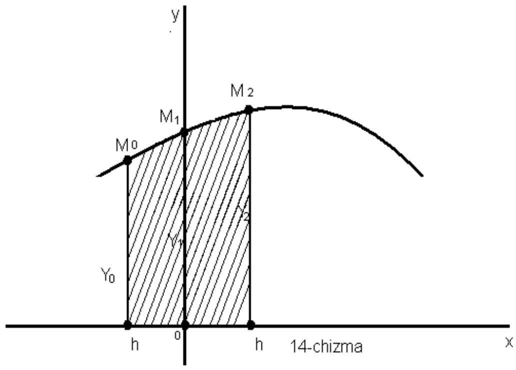
(5) ga trapetsiyalar formulasi deyiladi.

Parabolalar (Simpson) formulasi

[a.b] kesmani juft sonda n=2m bo`laklarga ajratamiz. $[x_0, x_1] va [x_1, x_2]$ kesmalarga mos va berilgan y=f(x) egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2),$ uchta nuqtadan o`tuvchi va o`qi oy o`qi parallel bo`lgan ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapedsiyaning yuzi bilan almashtiramiz. (13-chizma).

ISSN 2181-3187





13-chizma 14-chizma

Bunday egri chiziqli trapetsiyani parabolik trtapetsiya deb ataymiz.

O`qi Oy o`qqa parallel bo`lgan parabolaning tenglamasi $y = Ax^2 + Bx + C(6)$ ko`rinishda bo`ladi. A,B va C koeffitsentlar parabolaning berilgan uch nuqta orqali o`tish shartidan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Shunga o`xshagan parabolalarni kesmalarning boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapetsiyalar yuzlarining yig`indisi integralning taqribiy qiymatini beradi (14-chizma).

Lemma. Agar egri chiziqli trapersiya (6)parabola , Ox o`q va oralig`i 2h ga teng bo`lgan ikkita ordinata bilan chegaralangan bo`lsa, u holda uning yuzi $S\frac{h}{3}(y_0 + y_1 + y_2)(7)$ ga teng, bunday y_0 va y_2 chetdagi ordinatalar y_1 esa egri chiziqning kesma o`rtasidagi ordinatasi.

Isboti [1], 455 betda.

(7) formuladan foydalanib, quyidagi taqribiy qiymatlarni yozamiz.

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ISSN 2181-3187

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_{2(m-1)}}^{x_{2m=b}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{2(m-1)} + 4y_{2(m-1)} + y_{2m}$$

Yuqoridagi taqribiy qiymatlarning chap va o`ng tomonlarini qo`shib, chapda izlanayotgan integralni, o`ngda esa uning taqribiy qiymatini xosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + ... + 2y_{2(m-1)} + 4_{2m-1} + y_{2m})(8)$$

yoki
$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}) +$$
$$+ 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1})](9)$$

(9) formulaga **Simpson formulasi** deyiladi. Bu yerda bo`linish nuqtalarining soni 2m ixtiyoriy, lekin bu son qancha katta bo`lsa, (9) tenglikning o`ng tomonidagi yig`indi integral qiymatini shuncha aniq ifodalaydi.

Misol. $\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x}$ integralni to`g`ri ro`rtburchaklar trapetsiya va Simpson taqribiy formulalardan foydalanib 0.0001aniqlikda hisoblang.

Yechish. [2;10] kesmani teng n=8 ta bo`lakka bo`lamiz. U holda bo`ladi. Integral ostidagi funksiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

2-jadval

X	$y = \frac{1}{\lg x}$	X	$y = \frac{1}{\lg x}$
$x_0 = 2$	$y_0 = \frac{1}{0.3010} \approx 3.3211$	$x_5 = 7$	$y_5 = \frac{1}{0.8451} \approx 1.1833$

ISSN 2181-3187

$x_1 = 3$	$y_1 = \frac{1}{0.4771} \approx 2.0960$	$x_6 = 8$	$y_6 = \frac{1}{0.9031} \approx 1.1073$
$x_2 = 4$	$y_2 = \frac{1}{0.6021} \approx 1.6608$	$x_7 = 9$	$y_7 = \frac{1}{0.9442} \approx 1.0591$
$x_3 = 5$	$y_3 = \frac{1}{0.6990} \approx 1.4304$	$x_8 = 10$	$y_8 = 1$
$x_4 = 6$	$y_4 = \frac{1}{0.7781} \approx 1.2852$	$y_0 + y_1 + \ldots + y_7 = 13.1432$ $y_1 + y_2 + \ldots + y_8 = 10.8221$	

1-usul. To`g`ri to`rtburchaklar usuli. (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1 \cdot [y_0 + y_1 + \ldots. + y_7] = 1 \cdot 13{,}1432 = 13{,}1432$$

(3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1[y_0 + y_1 + \ldots. + y_8] = 10.8221$$

2-usul. Trapetsiyalar usuli, (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx h\left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \ldots. + y_7\right] =$$

$$\frac{3{,}3211 + 1}{2} + 9.8221 = 2.1605 + 9.8221 = 11.9826$$

Misol. Parabolalar (Simpson) usuli.

2m=8 deb olib, $\frac{h}{3} = \frac{b-a}{6m} = \frac{10-2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3}$ ekanligini etiborga olsak, (9) formulaga asosan:

ISSN 2181-3187

$$\int_2^{10}\frac{dx}{\lg x}\approx\frac{h}{3}\left[y_0+y_8+4(y_1+y_3+y_5+y_7)+2(y_2+y_4+y_6)\right]=\frac{1}{3}[3.3211+$$
$$+1+4(2.0960+1.4304+1.1833+1.0591)+2(1.6608+1.2852+1.1073)]=$$
$$=\frac{1}{3}[4.3211+23.0752+8.1066]=11.8343$$

Shunday qilib, berilgan integralni to`g`ri to`rtburchaklar formulasi yordamida hisoblab 13.1432 va 10.8221, trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblab 11.9826, parabolalar formulasi yordamida hisoblab 11.8343 bo`lishini topdik.

Xulosa

Maqola aniq integrallarni taqribiy hisoblashning to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson usullarini tahlil qiladi. Ushbu usullar N’yuton-Leybnits formulasidan foydalanish imkonsiz bo‘lgan hollarda qo‘llaniladi. To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli integralni zinapoyasimon shakllar yig‘indisi sifatida, trapetsiyalar usuli trapetsiyalar yuzasi sifatida, Simpson usuli esa parabolik trapetsiyalar yig‘indisi sifatida hisoblaydi. Hayotiy misolda shamol turbinasining 6 soatlik quvvati uchala usul yordamida 0.0001 aniqlikda hisoblanib, Simpson usulining eng yuqori aniqlik berishi, trapetsiyalar usulining o‘rtacha aniqlik ko‘rsatishi, to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulining esa katta xatolikka ega ekanligi aniqlanadi. Bo‘linish nuqtalarining sonini ko‘paytirish aniqlikni oshiradi. Ushbu usullar energetika, fizika va injeneriyada keng qo‘llaniladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Demidovich B.P., Maron I.A. *Hisoblash matematikasining asoslari*. – Toshkent: O‘zbekiston, 1995.
2. Kalitnitskiy V.A. *Matematik analiz va hisoblash usullari*. – Moskva: Visshaya shkola, 1986.
3. Atkinson K.E. *An Introduction to Numerical Analysis*. – Wiley, 1989.
4. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. – Cengage Learning, 2010.
5. Xoldashev A., Rahmonov B. *Matematik hisoblash usullari*. – Toshkent: Universitet, 2008.