ISSN 2181-3187

ODDIY DIFFYERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALALARNI YECHISHNING SONLI USULLARI.

Axrorjon.Ismoilov

FarDU,Amaliy matematika va informatika

kafedrasi katta o'qituvchisi.

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)

E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com

Abdug'aforov Dilyorbek Dilshodjon zoda

Farg'ona Davlat Universiteti Amaliy matematika

yo'nalishi 3-kurs talabasi 22-08-guruh talabasi

E-mail: abdugaforov02@bk.ru

Annotatsiya

Maqolada oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo'llaniladigan sonli usullar, xususan, Eylyer usuli va Runge-Kutta usuli haqida so'z yuritiladi. Ushbu usullarning matematik asoslari, qo'llanilishi va amaliy masalalarni yechishda jadval ko'rinishida echim olishning qulayliklari tahlil qilinadi. Eylyer usulining geometrik ma'nosi va Runge-Kutta usulining yuqori aniqlik darajasi misollar orqali ko'rsatiladi. Har bir usulning hisoblash jarayoni, boshlang'ich shartlari va integrallash qadami tushuntiriladi.

Kalit so'zlar: Noma`lum koeffitsientlar, koeffitsientlarni topish, eylyer usuli, Runge-Kutta usuli, boshlang'ich shart, funktsiyaning orttirmasi.

Аннотация

В статье рассматриваются численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, метод Эйлера и метод Рунге-Кутты. Анализируются математические основы этих методов, их применение и преимущества табличного представления решений при решении практических задач. Геометрический смысл метода Эйлера и высокая точность метода Рунге-Кутты демонстрируются на примерах. Подробно объясняются вычислительные процессы каждого метода, начальные условия и шаг интегрирования.

Ключевые слова: Неопределенные коэффициенты, нахождение коэффициентов, метод Эйлера, метод Рунге-Кутты, начальное условие, приращение функции.

Annotation

The article discusses numerical methods for solving boundary value problems of ordinary differential equations, particularly the Euler method and the Runge-Kutta method. The mathematical foundations of these methods, their applications, and the advantages of obtaining solutions in tabular form for practical problems are analyzed. The geometric interpretation of the Euler method and the high accuracy of the Runge-Kutta method are illustrated with examples. The computational process of each method, initial conditions, and integration step are explained in detail.

Keywords: Undetermined coefficients, finding coefficients, Euler method, Rung-Kutta method, initial condition, function increment

Kirish

EYLYER USULI. Yuqorida ko`rilgan usullar taqribiy analitik usullar bo`lib, bu hollarda echimlar analitik (formula) ko`rinishlarida olindi. Bu usullar bilan topilgan echimning aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo`ladi. Masalan, ketma – ket diffyerentsiallash usulini qo`llaganda qatorning juda ko`p hadlarini hisoblashga to`g'ri keladi va ko`p hollarda bu qatorning umumiy hadini aniqlab

ISSN 2181-3187

bo`lmaydi. Pikar algoritmini qo`llaganimizda esa, juda ko`p murakab integrallarni hisoblashga to`g'ri keladi va ko`p hollarda integral ostidagi funktsiyalar elementar funktsiyalar orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni yechishda echimlarni formula ko`rinishida emas, balki jadval ko`rinishida olish qulay bo`ladi. Diffyerenuial tenglamalarni raqamli usullar bilan echganda echimlar jadval ko`rinishida olinadi. Amaliy masalalarni yechishda ko`p qo`llaniladigan eylyer va Runge – Kutta usullarini ko`rib chiqamiz.

Eylyer usuli. Quyidagi

$$y' = f(x,y) \qquad (1)$$

birinchi tartibli diffyerentsial tenglamaning [a,b] kesmada boshlang'ich shart $x=x_0$ bo`lgan hol uchun $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi echimi topilishi lozim bo`lsin. [a,b] kesmani x_0 , x_1, x_2 ,…, x_n nuqtalar bilan n ta teng bo`lakchalarga ajratamiz; bunda $x_i = x_0 + ih$ (i= 0,1,2,…n), $h = \dfrac{b-a}{n}$ - qadam.

(1) tenglamani [a,b] kesmaga tegishli bo`lgan biror [x_k, x_{k+1}] kesmada integrallasak,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

ya`ni,

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx \qquad (2)$$

Bu yerda integral ostidagi funktsiyani $x=x_k$ nuqtada boshlang'ich o`zgarmas qiymatiga teng deb qabul qilinsa, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = y_k^{'}\cdot h$$

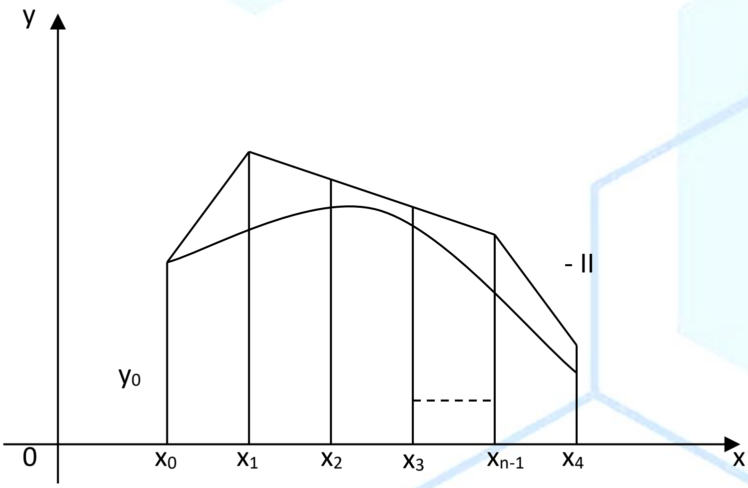
U holda (2) dan

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h \qquad (3)$$

$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$ ya`ni $y_k' h = \Delta y_k$ deb belgilasak,

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \qquad (4)$$

Ushbu jarayonni [a,b] ga tegishli bo`lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (1) ning echimini ifodalovchi jadvalini to`zamiz. eylyer usulining geometrik ma`nosi shundayki, bunda (1) ning echimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (1 - rasm).



1 – rasm

Quyidagi tizim

$$\begin{cases} y' = f_1(x, y, z) \\ z' = f_2(x, y, z) \end{cases} \qquad (5)$$

uchun

$$x=x_0 \text{ da } y=y_0, z=z_0 \qquad (6)$$

ISSN 2181-3187

boshlang'ich shart byerilgan. (5) ning taqribiy echimlari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

bu yerda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i); \qquad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i) \qquad\qquad (i = 0,1,2,...)$$

Misol. eylyer usuli yordamida $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ diffyerentsial tenglamaning [0,1] kesmada olingan va *u*(0)=1 boshlang'ich shartni qanotlantiruvchi *u(x)* echimining taqribiy qiymatlarini *h*=0,2 qadam bilan toping.

Yechish:

$$f(x, y) = y - \frac{2x}{y}; \; a = 0, \; b = 1, \; x_0 = 0, \; y_0 = 1, \; h = 0{,}2$$

Quyidagi hisoblash jadvalini to`zamiz.

1- qator .

i=0, $x_0 = 0, y_0 = 1{,}0000$

$$f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2*0}{1} = 1{,}0000$$
$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2*1 = 0{,}2000$$
$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, i = 0; y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2000$$

2-qator.

i=1 , $x_1 = 0 + 0{,}2 = 0{,}2; y_1 = 1{,}2000;$

$$f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} = 1{,}2 - \frac{2 * 0{,}2}{1{,}2} = 0{,}8667$$

$$\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0{,}2 * 0{,}8667 = 0{,}1733$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}2 + 0{,}1733 = 1{,}3733$$

va xakazo *i*=2,3,4,5lar uchun hisoblanadi.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i - \frac{2x_i}{y_i}$	$\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$
0	0,1	1,0000	1,0000	0,200
1	0,2	1,2000	0,8667	0,1733
2	0,4	1,3733	0,7908	0,1582
3	0,6	1,5315	0,7480	0,1496
4	0,8	1,6811	0,7293	0,1459
5	1,0	1,8270		

RUNGE-KUTTA USULI

Runge - Kutta usuli ko`p jihatdan Eylyer usuliga o`xshash, ammo aniqlik darajasi eylyer usuliga nisbatan yuqori bo`lgan usullardan biridir.

Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni yechish juda qulay. CHunki, bu usul orqali noma`lum funktsiyaning $x_{i+1}$ dagi qiymatini topish uchun uning $x_i$ dagi qiymati aniq bo`lishi etarlidir. Runge-Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko`ra bir necha turlarga bo`linadi. Shulardan amaliyotda eng ko`p qo`llaniladigani to`rtinchi daraja aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir.

ISSN 2181-3187

Birinchi tartibli $y=f(x,y)$ diffyerentsial tenglama uchun $x=x_i$ $(i=0,1,2,\ldots n)$ $y=y_i$ ma`lum bo`lsin. Bu yerda y_i boshlang'ich shart ma`nosida bo`lmasligi ham mumkin. Noma`lum funktsiya $y$ ning $x=x_{i+1}$ dagi qiymati $y_{i+1}=y_{i+1}(x)$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} & x_{i+1}=x_i+h, \quad y_{i+1}=y_i+\Delta y_i, \\ & \Delta y_i=\frac{1}{6}[Q_1^{(i)}+2Q_2^{(i)}+2Q_3^{(i)}+Q_4^{(i)}], \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} & Q_1^{(i)}=hf(x_i,y_i), \\ & Q_2^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{Q_1^{(i)}}{2}\right), \\ & Q_3^{(i)}=hf\left(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{Q_2^{(i)}}{2}\right), \\ & Q_4^{(i)}=hf(x_i+h,y_i+Q_3^{(i)}), \end{aligned} \qquad (8)$$

$i=0,1,2,\ldots,n-1$, $\quad h=\dfrac{b-a}{n}$ - integrallash qadami.

Tenglamaning echimi qidirilayotgan [a,b] kesma $x_i=x_0+ih$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$ nuqtalar bilan o`zaro teng n ta bo`lakka bo`lingan. *i* ning ha bir qiymati uchun (7) va (8) dagi amallarni bajaramiz va noma`lum funktsiya *y* ning qiymatlarini (tenglamaning echimini) quyidagi formuladan topamiz:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \qquad (i=0,1,2,\ldots,n) \qquad (9)$$

Misol: Runge-Kutta usuli bilan $y'=x+\cos\left(\frac{y}{\sqrt{5}}\right)$ tenglamaning [1,8; 2,8] kesmada aniqlangan va $u(1,8)=2,6$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi echimini $h=0,1$ qadam bilan hisoblang.

ISSN 2181-3187

Yechish:

$$f(x,y)=x+\cos(\frac{y}{\sqrt{5}});x_0=1,8;y_0=2,6,$$

$$h=0,1;a=1,8;b=2,8;h=\frac{b-a}{n}=0,1;n=10,$$
$$i=0;x_0=1,8;y_0=2,6,$$

$$Q_1^{(0)}=hf(x_0,y_0)=0,1\left\{x_0+\cos(\frac{y_0}{\sqrt{5}})\right)=0,2196,$$

$$Q_2^0=hf(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{Q_1^{(0)}}{2})=0,1*f(1,85;2,7098)=0,2012,$$

$$Q_3^{(0)}=hf(x_0+\frac{h}{2},y_0+\frac{Q_2^{(0)}}{2})=0,1*f(1,85;2,7006)=0,2205,$$

$$Q_4^{(0)}=hf(x_0+h,y_0+Q_3^{(0)})=0,1*f(1,9;2,6099)=0,2927,$$
$$y_1=y_0+\frac{1}{6}[Q_1^{(0)}+2Q_2^{(0)}+Q_4^{(0)}]=2,0259,$$
$$i=1;x_1=1,9;y_1=2,0259;y_2=3,0408$$

va hokazo.

Qiymatlar jadvali

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3

y_i	2,6	2,0259	3,0408	3,2519	3,4861	3,4861
I	6	7	8	9	10	
x_i	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	
y_i	3,9260	4,1478	4,3700	4,5971	4,9172	

Xulosa

Maqola oddiy differensial tenglamalarni sonli usullar yordamida yechishning amaliy va nazariy jihatlarini yoritadi. Eylyer usuli integral egri chiziqni siniq chiziqlar bilan taqribiy ifodalashga asoslangan bo‘lib, soddaligi bilan ajralib turadi. Runge-Kutta usuli, xususan, to‘rtinchi darajali aniqlikdagi versiyasi, Eylyer usuliga nisbatan yuqori aniqlik va qulaylikni ta’minlaydi. Har ikki usulning hisoblash jarayonlari misollar orqali tahlil qilinib, ularning amaliy masalalarni jadval ko‘rinishida yechishdagi afzalliklari ta’kidlanadi. Maqola hisoblash matematikasi sohasida sonli usullarni qo‘llash bo‘yicha muhim ma’lumotlarni taqdim etadi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O`zbekiston", 2003
2. Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "O`zbekiston", 1997
3. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
4. Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.
5. Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel’noy matematike» M. VSh. 1990.

ISSN 2181-3187

6. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.

7. Siddiqov A. «Sonli usullar va programmalashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.

8. Intyernet ma`lumotlarini olish mumkin bo`lgan saytlar:

www.exponenta.ru

www.lochelp.ru

www.math.msu.su

www.colibri.ru

www.ziyonet.uz