ISSN 2181-3187

FUNKTSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH

A.I.Ismoilov amaliy matematika

va informatika kafedrasi

katta o'qituvchisi. fizika-matematika

fanlari bo'yicha falsafa

doktori(PhD)

ismoilovaxrorjon@yandex.com

Alimamadov Nurmuhammad Alimardon ug'li

fizika matematika

fakulteti amaliy matematika

yunalishi 3- bosqich talabasi

*alimamadovnurmuhammad*02@gmail.com

Annotatsiya

Maqola funktsiyalarni interpolyatsiyalash masalasiga bag‘ishlangan bo‘lib, bu jarayonning matematik asoslari va amaliy qo‘llanilishi haqida ma’lumot beradi. Interpolyatsiya funktsiyaning berilgan nuqtalaridagi qiymatlariga asoslangan holda uni yaqinlashtirish uchun ko‘pxadni topishdan iborat. Maqolada chekli ayirmalar tushunchasi, ularning xossalari va N’yutonning birinchi va ikkinchi interpolyatsion formulalari batafsil yoritilgan. Formulalar oldinga va orqaga qarab interpolyatsiyalash uchun qo‘llaniladi, shuningdek, koldik xadlarning hisoblanishi va xatolikni baholash usullari keltirilgan. Misollar orqali logarifmik funktsiya uchun interpolyatsiya jarayoni ko‘rsatilgan. Maqola matematik hisoblashlarda funktsiyalarni soddalashtirish va aniq qiymatlarni topishda interpolyatsiyaning ahamiyatini ta’kidlaydi.

Kalit so'zlar: Interpolyatsiyalar, ayirma, chekli ayirma, yig'indi, n-tartibli ayirma, N'yutonning interpolyatsion formulalari, interpolyatsiya tugun, interpolyatsiya kadami, chiziqli, parabolik, analitik ko`rinish, koldik xad, orkaga qarab interpolyatsiyalash.

Kirish

MASALANING QO`YILISHI

Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo`yilishida katnashadigan funktsiyalarni unga biror muayyan ma`noda yaqin va tuzilishi soddarok bo`lgan funktsiyalarga almashtirish goyasiga asoslangan. Bu bobda funktsiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo`llaniladigan qismi — funktsiyalarni interpolyatsiyalash ma-salasi kurib chikiladi.

Interpolyatsiya masalasining moxiyati quyidagidan iborat. Faraz kilaylik u=f(x} funktsiya jadval ko`rinishida berilgan bo`lsin:

$Y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1),\dots, y_n = f(x_n)$

Odatda interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha ko`rinishda qo`yiladi: Shundai n-tartiblidan oshmagan R(x) = $R_n(x)$ ko`pxad topish kerakki, $P(x_i)$ berilgan $x_i$(i=0,1,1,…,n) nuqtalarda f(x) bilan bir xil qiymatlarni qabul kilsin, ya`ni $P(x_i) = y_i$.

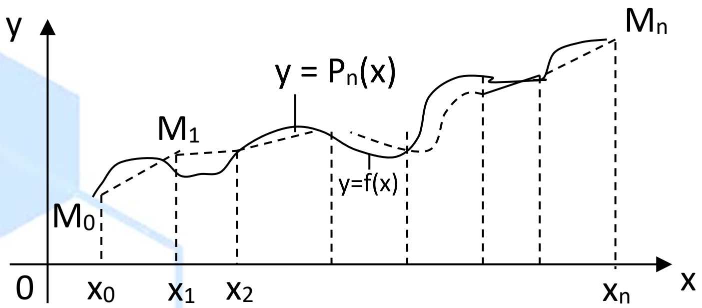
Bu masalaning geometrik ma`nosi quyidagidan iborat:

darajasi p dan ortmaydigan shunday

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \qquad (1)$$

ko`pxad kurilsinki, uning grafigi berilgan M_i (x_i, u_i) (i = 0,1, … n) nuqtalardan utsin (9-rasm). Bu erdagi x_i (i=0,1,2,…n) nuqtalar interpolyatsiya tugun nuqtalari yoki tugunlar deyiladi. R(x) esa interpolyatsiyalovchi funktsiya deyiladi.

ISSN 2181-3187



9- rasm

Amalda topilgan R(x) interpolyatsion formula f(x) funktsiyaning berilgan x argumentning (interpolyatsiya tugunlaridan farqli) qiymatlarini hisoblash uchun qo`llaniladi. Ushbu operatsiya f u n k t s i y a n i  i n t e r p o l y a t s i y a l a s h deyiladi. (Agar x∈ (a,b) bo`lsa i n t e r p o l y a t s i y a l a s h x∈ (a,b) bo`lsa, ek s t r a p o l y a t s i y a l a s h deyiladi).

CHEKLI AYIRMALAR VA ULARNING XOSSALARI

Faraz kilaylik argumentning o`zaro teng o`zoklikda joylashgan $x_i=x_0+ih$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$ (h-jadval kadami) qiymatlarida f(x) funktsiyaning moc ravishdagi $y_i=f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo`lsin.

Birinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta y_i=f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i \qquad (2)$$

ifodaga ikkinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2}-2 y_{i+1} + y_i \quad (3)$$

ifodaga va xokazo n-tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \qquad (4)$$

ifodaga aytiladi. CHekli ayirmalarni quyidagi 1- jadval ko`rinishida kam olish mumkin.

1-jadval

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	…
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
x_3	y_3	Δy_3				
x_4	y_4					
…						

(2) dan quyidagiga egamiz

$y_{i+1}= y_1+\Delta y_i = (1+\Delta)\, y_i$ (5)

Bu erdan ketma-ket quyidagilarni keltirib chikaramiz:

$y_{i+2} = (1+\Delta)y_{i+1} = (1+\Delta)^2\, y_i,$

$y_{i+3} = (1+\Delta)y_{i+2} = (1+\Delta)^3\, y_i$

……………………………………..

$y_{i+n} = (1+\Delta)^n\, y_i$

N’yuton binomi formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$y_{i+n} =y_i +C_n^1\, \Delta y_i + \ldots +\Delta^n y_i$

Bundan esa:

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta)-1]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i - \ldots + (-1)^n y_i$$

yoki

$$\Delta^n y_i = y_{i+1} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \dots + (-1)^n y_i \qquad (6)$$

Masalan, (4.6) dan

$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$,

$\Delta^3 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_1$

va x.k.

CHekli ayirmalar quyidagi x o s s a l a r g a ega.

1.Funktsiyalar yig'indisining (ayirmasining) chekli ayirmasi funktsiyalarning chekli anirmalari yig'indisiga (ayirmasiga) teng:

$\Delta^n (f(x) \pm \varphi(x)) = \Delta^n f(x) \pm \Delta^n \varphi(x)$.

2. Funktsiya o`zgarmas songa ko`paytirilsa, uning chekli ayirmasi usha songa ko`payadi:

$\Delta^n(k \cdot f(x)) = k \cdot \Delta^n f(x)$.

3. n-tartibli chekli ayirmaning /p-tartibli chekli ayirmasi (p+t)- tartibli chekli ayirmaga teng:

$\Delta^m(\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$.

4. n-tartibli ko`paddning p-tartibli chekli ayirmasi o`zgarmas songa, n+1-tartibli chekli ayirmasi esa nolga teng.

Misol. Jadval kadamini h=1 va dastlabki qiymatni $x_o = 0$ deb xisoblab, $u = 2x^3 - 2x^2 + Zx - 1$ ko`pxadning ayirmalar jadvali to`zilsin.

E c h i s h . u ning $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $y_0 = -1$, $y_1=2$, $y_2 = 13$, $y_3 = 44$. Bundan esa quyidagilar kelib chikadi: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 3$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = 11$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 8$. Bu qiymatlarni 2- jadvalga joylashtiramiz:

ISSN 2181-3187

2-jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	8		
1	2	11	8	12
2	13	31	20	12
3	44	63	32	12
4	107	107	44	
5	214			
…	…	…	…	…

Berilgan funktsiya Z- darajali kundad bo`lganligi sa-babli uning 3-tartibli ayirmasi o`zgarmas son bo`lib, $\Delta^3 y=12$ bo`ladi. Jadvalning kolgan ustunlari

$\Delta^2 y_{i+1}=\Delta^2 y_i+12,$ (i=0,1,2,…);

$\Delta y_{i+1}=\Delta y_i+\Delta^2 y_i$ (i=1,2,…);

$y_i+{}^1=y_i+\Delta y_i$ (i=2,3,..)

formulalar yordamida to`ldiriladi.

N'YUTONNING 1- INTERPOLYATSION FORMULASI

Faraz kilaylik y=f(x) funktsiya uchun $y_1=f(x)$ qiymatlar berilgan va interpolyatsiya tugunlari teng o`zoklikda joylashgan bo`lsin, ya`ni $x_1=x_0+ih$ (I=0,1,2,…,h) (h – interpolyatsiya kadami). Argumentning moc qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan moc qiymatlar oladigan ko`pxad tuzish lozim bo`lsin va bu ko`pxad kuiidagi ko`rinishga ega bo`lsin:

$$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \quad (7)$$

ISSN 2181-3187

Bu n-tartibli ko`pxad. Interpolyatsiya masalasidagi shartga ko`ra R(x) ko`pxad $x_0$, $x_1$, …, $x_n$ interpolyatsiya tugunlarida $P_n(x_0)=y_0$. $P_n(x_1)=y_1$, $P_n(x_2)=y_2$,... $P_n(x_n)=y_n$ qiymatlarni qabul kiladi. $x=x_0$ deb tasavvur etsak, (7) formuladan $y_0=P_n(x_0)=a_0$, ya`ni $a_0=y_0$. So`ngra x ga $x_1$ va $x_2$ larning qiymatlarini berib, ketma-ket quyidagiga ega bo`lamiz:

$y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0)$, bundan $a_1=\frac{\Delta y_0}{h}$

$y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1)$,

ya`ni $y_2 - 2\Delta y_0 - y_0=2h^2a_2$

yoki $y_2-2y_1+y_0=2h^2a_2$, bundan $a_2=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$

Bu jarayonni davom ettirib, $x=x_n$ uchun kuiidagi ifodani hosil kilamiz:

$$a_n=\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan a_0, a_1, a_2,…a_n koeffitsientlarning qiymatlarini (7) formulaga kuysak,

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0)+\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!y^n}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

(4.8)

ko`rinishga ega bo`lamiz. Bu formulada $\frac{x-x_0}{h}=q$, ya`ni $x = x_0+hq$ belgilash kiritilsa, u xolda

$$\frac{x-x_1}{h}=\frac{x-x_0-h}{h}=q-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h}=\frac{x-x_0-2h}{h}=q-2,\quad \text{va x.k.}$$

ISSN 2181-3187

Natijada N'yutonning 1- interpolyatsion formulasiga ega bo`lamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (9)$$

N'yutonning 1-interpolyatsion formulasini [a, b] ning boshlangich nuqtalarida qo`llash qulay.

Agar p== 1 bo`lsa, u xolda $P_1(x)=y_0+q\Delta y_0$ ko`rinishdagi chiziqli interpolyatsion formulaga, p=2 bo`lganda esa

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

ko`rinishdagi parabolik interpolyatsion formulaga ega bo`lamiz.

N'yutonning 1-formulasini oldinga qarab interpolyatsiyalash formulasi ham deyiladi.

(9) formulaning koldik, xadi

$$P_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (10)$$

bu erda $\xi \in [x_0, x_n]$

Funktsiyaning analitik ko`rinishi har doim ham ma`lum bulavermaydi. Bundai xollarda chekli ayirmalar to`zilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. U xolda N'yutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik

$$P_n(x) \approx \frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)} y_0 \qquad (11)$$

ISSN 2181-3187

formula orqali topiladi.

Misol. u=lgx funktsiyaning 4.3-jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib, uning x=1001 bo`lgan xoldagi qiymatini toping.

4.3-jadval

x	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
1000	3,0000000	43214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	- 401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Y e c h i s h . Chekli aiirmalar jadvalini to`zamiz. 3- jadvaldan ko`rinib turibdiki, 3-tartibli chekli ayirma o`zgarmas, shu sababli (9) formula uchun n=3 olish etarli:

$$y(x)=P_3(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

x=1001 uchun q = 0,1 (h=10). Shuning uchun

$$\lg 1001=3{,}0000000+0{,}1\cdot 0{,}0043214+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9}{2}\times$$

$$\times 0{,}0000426+\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9}{6}\cdot 0{,}0000008=3{,}0004341$$

Endi koldik xadni baxolaymiz. (10) formulaga asosan n=3 bo`lganda quyidagiga egamiz:

ISSN 2181-3187

$$R_3(x)=\frac{h^4\cdot q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}f^{(4)}(\xi)$$

bu erda $1000<\xi<1030$.

f(x) =lgx bo`lgani sababli $f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{x^4}\lg e$; shuning uchun

$$\left|f^{(4)}(\xi)\right|<\frac{3!}{(1000)^4}\lg e.$$

h=10 va q=0,1 uchun quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\left|R_3(1001)\right|=\frac{0{,}1\cdot 0{,}9\cdot 1{,}9\cdot 2{,}9\cdot 10^4\lg e}{4\cdot(1000)^4}\approx 0{,}5\cdot 10^{-9}$$

Shunday kilib, koldik xad $R_3(1001)\approx 0{,}5\cdot 10^{-9}$ ekan.

N'YUTONNING 2 - INTERPOLYATSION FORMULASI

N'yutonning birinchi interpolyatsion formulasi jadvalning boshida va ikkinchi formulasi esa jadvalning oxirida interpolyatsiyalash uchun muljallangan. N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formula-sini keltirib chikaramiz.

Faraz kilaylik y=f(x) funktsiyaning n+1 ta qiymati ma`lum bo`lsin; ya`ni argumentning n=1 ta $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlarida funktsiyaning qiymatlar $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ bo`lsin. Tugunlar orasidagi masofa h o`zgarmas bo`lsin. Quyidagi ko`rinishdagi interpolyatsion ko`pxadni ko`ramiz:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_n-1)+a_3(x-x_n)(x-x_n-1)(x-x_n-2)+\dots+$$

$$+a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1) \quad (12)$$

Bunda katnashayotgan $a_0, a_1, \dots, a_n$ noma`lum koeffitsientlarni topishni $x=x_n$ bo`lgan xoldan boshlash kerak. So`ngra argumentga $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$ qiymatlar berib, kolgan koeffitsientlar animanadi.

ISSN 2181-3187

Yuqorida kurilgan muloxazalarni (12) formula uchun ham qo`llasak, u xolda noma`lum koeffitsientlar $a_1, a_2, a_3,\ldots, a_n$ larni topish uchun quyidagilarni hosil kilamiz:

$$a_0 = y_n, \qquad a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \qquad \ldots, a_n = \frac{\Delta_n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan koeffitsientlarning qiymatlarini (12) formulaga kuysak,

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)x - x_{(n-1)} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)\ldots(x - x_1)$$

(13)

ko`rinishdagi N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi kelib chikadi. Bu formulada $q=(x-x_n)/h$ belgilash kiritsak,

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \quad (14)$$

hosil bo`ladi. Ba`zan bu formulani orkaga qarab interpolyatsiyalash formulasi ham deyiladi. (14) formuladan [a,b] kesmaning oxirgi nuqtalarida foydalanish qulayrokdir.

N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasining koldik xadini baxolash formulasi quyidagicha bo`ladi:

$$P_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi)$$

bu erda $q=(x-x_n)/h$, $\xi \in [x_0, x_n]$

Agar funktsiyaning analitik ko`rinishi ma`lum bo`lmasa, u xolda chekli ayirmalar to`zilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. Shuning uchun N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik formulasi

ISSN 2181-3187

$$P_n(x) \approx \frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_n$$

bo`ladi.

Misol. u=lgx funktsiyaning 4-jadvalda bermlgan qiymatlaridan foydalanib, uning x=1044 dagi qiymatini hisoblang (h=10).

4- jadval

X	y
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Y e c h i s h . CHekli ayirmalar jadvalini to`zamiz: 5.-jadval

x	U	Δu	Δ^2u	Δ^3u
1000	3,0000000	73214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	- 401	
1040	3,0170333	41560		

1050	3,0211893			

x_n =1050 bo\`lsin, u xolda

$$q=\frac{x-x_n}{h}=\frac{1044-1050}{10}=-0.6$$

5- jadvaldagi tagiga chizilgan ayirmalardan foydalangan xolda (14) formulaga asosan quyidagiga ega bo\`lamiz:

$$\lg 1044=3{,}0211893+(-0{,}6)\cdot 0{,}0041560+\frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)}{2}\times$$
$$\times 0{,}0000401+\frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)\cdot(-0{,}6+2)}{6}\cdot 0{,}0000008=3{,}0187005$$

Xulosa

Maqola funktsiyalarni interpolyatsiyalashning nazariy va amaliy jihatlarini yoritadi. Interpolyatsiya masalasi funktsiyaning berilgan nuqtalaridagi qiymatlariga asoslanib, uni koʻpxad orqali yaqinlashtirishni oʻz ichiga oladi. Chekli ayirmalar va ularning xossalari interpolyatsion formulalarni tuzishda asosiy vosita sifatida ishlatiladi. N'yutonning birinchi va ikkinchi interpolyatsion formulalari mos ravishda jadvalning boshida va oxirida qoʻllaniladi, bu esa turli xollarda qulaylik yaratadi. Koldik xadlar va xatolikni baholash formulalari natijalarning aniqligini ta'minlaydi. Misollar orqali ushbu usullarning amaliy qoʻllanilishi koʻrsatilgan. Interpolyatsiya matematik modellashtirish, injeneriya va boshqa sohalarda funktsiyalarni soddalashtirish va hisoblashda muhim ahamiyatga ega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Demidovich B.P., Maron I.A. *Hisoblash matematikasining asoslari*. – Toshkent: Oʻzbekiston, 1995.
2. Kalitnitskiy V.A. *Matematik analiz va hisoblash usullari*. – Moskva: Visshaya shkola, 1986.

ISSN 2181-3187

3. Atkinson K.E. *An Introduction to Numerical Analysis*. – Wiley, 1989.

4. Burden R.L., Faires J.D. *Numerical Analysis*. – Cengage Learning, 2010.

5. Xoldashev A., Rahmonov B. *Matematik hisoblash usullari*. – Toshkent: Universitet, 2008.