ISSN 2181-3187

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISHNING KRAMER VA GAUSS USULLARI

A.I.Ismoilov amaliy matematika va
informatika kafedrasi katta o'qituvchisi.
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)
E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com
Ibrohimjonov Ma'rufjon Hokimjon o'g'li
Farg'ona Davlat Universiteti Amaliy matematika
yo'nalishi 3-kurs talabasi 22-08-guruh talabasi
E-mail: marufjonibrohimjonov0@com

Annotatsiya

Ushbu maqolada chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ikki asosiy usuli — Kramer va Gauss usullari tahlil qilinadi. Dastlab, ikkita noma'lumli va uchta noma'lumli sistemalar uchun Kramer formulalari qanday hosil qilinishi va determinantlar asosida qanday ishlashi ko'rsatib berilgan. So'ng, Gauss usuli yordamida tenglamalar sistemasini uchburchak ko'rinishga keltirib, bosqichma-bosqich noma'lumlarni topish tartibi bayon etilgan. Har ikki usulga doir amaliy misollar orqali nazariy ma'lumotlar mustahkamlangan. Shuningdek, real iqtisodiy masalalarni yechishda bu usullarning amaliy ahamiyati ochib berilgan. Kramer usulining kichik o'lchamli sistemalarda qulayligi, Gauss usulining esa kompyuterda tez bajarilishi keltirilgan. Mavzu iqtisodiy modellashtirishda keng qo'llaniladigan chiziqli dasturlash asoslari bilan bevosita bog'liqdir.

Kalit so'zlar:chiziqli tenglamalar, Kramer usuli, Gauss usuli, determinant, aniqlovchi, algebraik tulduruvchi, matritsa, arifmetik amallar, chiziqli sistemalar, iqtisodiy modellashtirish

ISSN 2181-3187

Kirish

Chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni teng (n=m) bo'lgan holda echimini topish masalasi bilan shugullanamiz.

Dastlab, maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgan, ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini (n=m=2) kuramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=в_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=в_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Bu erda a_{ij} cistemaning koeffitsentlari, vi sistemaning ozod xadlari, xj sistemaning noma'lumlari va (1) sistemadagi tenglamalarni ayniyatga aylantiruvchi $x_j=\alpha_j$ sonlari sistemaning echimlari deb atalishini eslatib utamiz.. Bunda sistema echimi yagona, cheksiz kup yoki mavjud bo'lmasligi mumkinligi bizga ma'lum.

(1) sistema uchun Δ asosiy va ikkita Δ_1, Δ_2 yordamchi aniqlovchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} в_1 & a_{12} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{21} & в_2 \end{vmatrix}$$

Δ asosiy aniqlovchi sistemaning koeffitsentlaridan xosil kilinib, yordamchi aniqlovchilar esa uning ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil kilinadi.

(1) sistema tenglamalarini dastlab mos ravishda a_{22} va $-a_{12}$ larga kupaytirib, so'ngra kushamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})\,x_1+(a_{12}\,a_{22}-a_{22}a_{12})x_2=в_1a_{22}-в_2\,a_{12}$$

Bu tenglikni kiritilgan aniqlovchilar orkali quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1=\begin{vmatrix} в_1 & a_{11} \\ в_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_1=\Delta_1 \qquad (2)$$

Shuningdek (1) sistema tenglamalarini mos ravishda $(-a_{21})$ va a_{11} larga kupaytirib kushsak, u holda

ISSN 2181-3187

$(a_{11}a_{21} - a_{21}a_{11})x_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = в_2a_{11} - в_1a_{21}$

Yukoridagidek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 \\ a_{22} & в_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta_2 \qquad (3)$$

Agar noma'lumlarga nisbatan (2) va (3) chiziqli tenglamalarni echsak,

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \text{ va } x_2 = \Delta_2/\Delta \qquad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular (1) sistema echimi uchun ***Kramer formulalari*** deb yuritiladi.

Endi uch noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasini karaylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{31}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu sistemaning echimi uchun xam Kramer formulalarini chikarish kiyin emas.

Quyidagi asosiy aniqlovchini kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bunda i ustunni $в_1$, $в_2$, $в_3$ ozod xadlar ustuni bilan almashtirib Δ_i, i=1,2,3 yordamchi aniqlovchilarni xosil kilamiz.

a_{ij} elementning algebraik tuldiruvchisini A_{ij} kabi belgilaylik.

(5) sistema tenglamalarini mos ravishda Δ aniqlovchidagi birinchi ustun elementlarining algebraik tuldiruvchilariga (A_{11}, A_{21}, A_{31}) kupaytirib kushib chikaylik.

$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})x_2 + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} +$

$+ a_{33}A_{31})x_3 = в_1A_{11} + в_2A_{21} + в_3A_{31};$

ISSN 2181-3187

Oxirgi munosobatni aniqlovchilar tiliga utkazsak va Laplas formulasidan foydalansak, $\Delta x_1+0x_2+0x_3=\Delta_1$ ёки $\Delta x_1=\Delta_1$ tenglamani olamiz.

Shuningdek 2-ustun yoki 3-ustun elementlari algebraik tuldiruvchilarini mos ravishda (5) sistema tenglamalariga kupaytirib kushib chiksak, $\Delta x_2=\Delta_2$ va $\Delta x_3=\Delta_3$ tenglamalarni olamiz.

Bu tenglamalardan (5) sistema uchun

$$x_1=\Delta_1/\Delta , \qquad x_2=\Delta_2/\Delta , \qquad x_3=\Delta_3/\Delta$$

Kramer formulalarini xosil kilamiz.

M i s o l : Sistema Kramer usulida echilsin:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

yech i sh : Asosiy va yordamchi aniqlovchilarni xisoblaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=18, \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=-5,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&0&1\\2&0&-2\end{vmatrix}=-1, \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&0\\2&1&0\end{vmatrix}=7.$$

Kramer formulalariga asosan

$$x_1=\Delta_1/\Delta=-5/18, \qquad x_2=\Delta_2/\Delta=-1/18, \qquad x_3=\Delta_3/\Delta=7/18.$$

IZOX: (1) yoki (5) sistema yagona echimga ega bo’lishi uchun $\Delta\neq0$ bo’lishi kerak. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$ bo’lsa sistema cheksiz kup echimga ega bo’ladi. Agarda $\Delta=0$ va $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi aniqlovchilardan kamida bittasi noldan farkli bo’lsa , sistema echimga ega bo’lmaydi.

ISSN 2181-3187

Endi sistemani Gauss usulida echishni kurib chikamiz. Bu usul moxiyatini (5) sistemani echish orkali kursatamiz. (5) sistemani Gauss usulida echish uchun uning ikkinchi tenglamasidan x_1 noma'lumni, uchinchi tenglamasidan esa x_1 va x_2 noma'lumlarni yukotib, quyidagi uchburchak ko'rinishdagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 + a_{13}x_3= в_1 \\ c_{22}x_2+ c_{23}\, x_3= d_2 \\ c_{33}x_3=d_3 \end{cases}$$

u Gauss usulining tugri yuli deb ataladi.

Uchburchakli sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab, birin-ketin x_3, x_2 va x_1 noma'lumni ketma–ket topamiz. Bu Gauss usulining teskari yuli deb ataladi.

M i s o l :

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=20 \\ 3x_1+4x_2-2x_3 = -11 \\ 4x_1+2x_2+3x_3=9 \end{cases}$$

Ye ch i sh : Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2\, x_1-3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -17x_2+16x_3 = 82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

Endi uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3=20 \\ -17x_2+16x_3 = 82 \\ 43x_3= 129 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_3= 3, so'ngra ikkinchi tenglamadan x_2 =-2 va nixoyat birinchi tenglamadan x_1 =1 ekanligini topamiz.

ISSN 2181-3187

Umumiy, n=m≥4 bo’lgan holda xam Kramer formulalari va Gauss usuli yukorida kurib utilgan singari bo’ladi.

Kramer va Gauss usullarining kulayliklari va kamchiliklarini kursatamiz.

1) Kramer formulalari ixtiyoriy chiziqli sistema uchun bir xil ko’rinishga ega.
2) Kramer formulalarida echimlarning ixtiyoriy biri topilishi mumkin.
3) Kramer formulasi ikki va uch noma'lumli sistema uchun kulay.
4) Turt va undan ortik noma'lumli sistema uchun Kramer formulalaridan foydalanish murakkab.
5) Gauss usuli aniqlovchilarni xisoblashni talab etmasdan, fakat koeffitsientlar va ozod xadlar ustida arifmetik amallar bajarish orkali amalga oshiriladi.
6) Gauss usulini kompyuterda amalga oshirish oson.
7) Gauss usulida juda kup arifmetik amallar bajarish talab etiladi.
8) Gauss usulida noma'lumlardan fakat birini topib bo’lmaydi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi iktisodiy masalalarni echishda juda keng mikyosda kullaniladi. Kupgina iktisodiy masalalarni chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida echish jarayonida xatto yangi chiziqli dasturlash fani vujudga keldi.

Quyidagi masalalarga murojaat etaylik.

1-masala. Oyok kiyim fabrikasi 3 xil maxsulot, ya'ni etik, tufli va botinka ishlab chikarishga ixtisoslashtirilgan bo’lsin. Shu maxsulotlarni ishlab chikarish uchun 3 xil S_1, S_2 va S_3 xomashyo ishlatilsin. Xar bir juft oyok kiyimiga sarf bo’ladigan xomashyo xarajati me'yori va xomashyolarning bir kunlik sarflanadigan mikdori quyidagi jadvalda berilgan bo’lsin:

Xomashyo turi	Bir juft oyok kiyimi iG`ch.ga sarf bo’ladigan xomashyo			Xomashyoning bir kun-lik sarf mikdori. (shartli rakamlar)
	Etik	Tufli	Botinka	

ISSN 2181-3187

S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Bu ma'lumotlar asosida xar bir oyok kiyimining bir kunlik ishlab chikarilish mikdori topilsin.

Echish: Masalani echish uchun etik, tufli va botinkaning bir kunlik ishlab chikarilish mikdorlarini mos ravishda x_1,x_2 va x_3 deb belgilaymiz.Unda,masala shartlariga asosan, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini xosil kilamiz:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yukorida kurib utilgan usullardan biri yordamida echib, $x_1=200$, $x_2=300$ va $x_3=200$ ekanligini topamiz. Demak, fabrika bir kunda 200 juft etik, 300 juft tufli va 200 juft botinka ishlab chikarar ekan.

2-masala. 1- chi va 2-avtoxujaliklarga 2 ta zavoddan avtomobillar junatiladi. 1-avtoxujalikning extiyoji 200 avtomobil, 2- avtoxujalikning extiyoji esa 300 avtomobilni tashkil etsin. 1-zavod 350 ta, 2- zavod esa 150 ta avtomobil ishlab chikargan. Zavodlardan xar bir avtoxujalikka etkazib beriladigan bitta avtomobilga kilinadigan sarf-xarajat quyidagi jadvalda berilgan:

Zavod	Bir avtomobilni etkazib berishga bo'ladigan xarajat	
	1- avtoxujalik	2- avtoxujalik

ISSN 2181-3187

1-zavod	15 $	20 $
2-zavod	8 $	25 $

Avtomobillarni etkazib berishga ajratilgan sarf-xarajat mikdori 7950 pul birligini tashkil etsa, zavodlardan avtomobillarni xujaliklarga etkazib berishning rejasi topilsin.

<u>Echish:</u> Bu masalani echish uchun i-zavoddan j-avtoxujalikka etkazib beriladigan avtomobillar mikdorini x_{ij} (i,j=1,2) deb belgilasak, masala shartiga kura quyidagi sistema xosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}=350 \\ x_{21}+x_{22}=150 \\ x_{11}+x_{12}=200 \end{cases}$$

$$15x_{11}+20x_{12}+8x_{21}+25x_{22}=7950.$$

Bu 4 noma'lumli 4 ta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lib, uni biror usulda echish natijasida$x_{11}=50$, $x_{12}=300$, $x_{21}=150$, $x_{22}=0$ javobni xosil kilamiz. Bu echim anik iktisodiy mazmo'nga egadir, ya'ni 2-zavodda ishlab chikarilgan barcha 150 avtomobilni 2-chi avtoxujalikka, 1-zavodda ishlab chikarilgan 350 ta avtomobillarning 300 tasini 1- avtoxujalikka va kolgan 50 tasini esa 2- avtoxujalikka yuborilsa, tashish xarajatlari kursatilgan mikdorda bo'ladi.

Xulosa

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer va Gauss usullari o'zaro farqli, ammo bir-birini to'ldiruvchi usullardir. Kramer usuli determinantlar asosida ishlaydi va ikki yoki uch noma'lumli sistemalar uchun aniq, qulay yechim beradi. Biroq u ko'p noma'lumli sistemalar uchun noqulay hisoblanadi. Gauss usuli esa koeffitsiyentlar va ozod hadlar bilan to'g'ridan-to'g'ri arifmetik amallar bajarish orqali ishlaydi. Bu usul yirik o'lchamli sistemalar uchun samaraliroq va kompyuterda

ISSN 2181-3187

avtomatlashtirishga qulay. Ikkala usul ham iqtisodiy va muhandislik sohalarida keng qo‘llaniladi. Ayniqsa, resurslarni taqsimlash, ishlab chiqarishni rejalashtirish kabi masalalarni chiziqli tenglamalar yordamida model qilish orqali samarali yechimlar topiladi.

ABIYOTLAR:

1. **SOATOV YO.U.** «Oliy matematika», I jild, Toshkent, O′qituvchi, 1992 y.
2. **PISKUNOV N.S.** «Differentsial va integral hisob», 1-tom, Toshkent, O′qituvchi, 1972 y.
3. **MADRAXIMOV X.S., GANIEV A.G., MUMINOV N.S.** «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O′qituvchi, 1988 y.
4. **SARIMSOKOV T.A.** «Haqiqiy o′zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi», Toshkent, O′qituvchi, 1968 y.
5. **T. YOKUBOV** «Matematik logika elementlari», Toshkent, O′qituvchi, 1983y.
6. **RAJABOV F., NURMETOVA.** «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O′qituvchi, 1990 y.
7. **SHNEYDER V.E., SLUTSKIY A.I., SHUMOV A.S.** «Oliy matematika qisqa kursi», I tom, Toshkent, O′qituvchi, 1983 y.
8. **NAZAROV R.N., TOSHPO′LATOV B.T., DUSUMBETOV A.D.** «Algebra va sonlar nazariyasi», I qism, Toshkent, O′qituvchi, 1993 y.
9. **NAZAROV X., OSTONOV K.** «Matematika tarixi», Toshkent, O′qituvchi, 1996 y.

ISSN 2181-3187

10. **IBROXIMOV R.**, «Matematikadan masalalar to′plami», Toshkent, O′qituvchi, 1990 y.

11. **AZLAROV T., MANSUROV X.** «Matematik analiz», I qism, Toshkent, O′qituvchi, 1994 y.

12. **TO′LAGANOV T., NORMATOV A.** «Matematikadan praktikum», Toshkent, O′qituvchi, 1983 y.