ISSN 2181-3187

FUNKTSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH. LAGRANJNING INTERPOLYATSION FORMULASI. EKSTRAPOLYATSIYA

A.I.Ismoilov
FarDU,Amaliy matematika va informatika
kafedrasi katta o'qituvchisi,
Fizika-matematika
fanlari bo'yicha falsafa doktori(PhD)
E-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com
Habibjonov Behruz Bahodur zoda
Farg‘ona Davlat Universiteti
Amaliy matematika yo‘nalishi
3-kurs talabasi 22-08-guruh talabasi
E-mail: habibjonovbehruz0@gmail.com

Annotatsiya: Mazkur maqolada funksiyalarni interpolyatsiyalash usullaridan biri — Lagranjning interpolyatsion formulasi keng yoritilgan. Interpolyatsiyaning mohiyati, fundamental ko‘pxadlar, interpolyatsiya ko‘pxadining umumiy tuzilmasi, va bu ko‘pxadlar orqali berilgan nuqtalar to‘plamida funksiyani aniqlash usullari bosqichma-bosqich tushuntiriladi.

Shuningdek:

1. Interpolyatsiya qoldiq xadi va uning baholanishi bo‘yicha teorema bayon etiladi.
2. Ekstrapolyatsiya — ya’ni jadvaldagi qiymatlardan tashqarida funksiyaning qiymatini aniqlash muammosi va uning yechish usullari ko‘rib chiqiladi.
3. Teskari interpolyatsiya — funksiyaning ma’lum qiymatiga mos argumentni aniqlash yo‘llari tahlil qilinadi.

Maqola oxirida Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalari taqqoslanadi va ularning qoʻllanilish imkoniyatlari yoritiladi. Misollar orqali har bir metodning amaliy qoʻllanilishi izohlanadi.Maqola matematika yoʻnalishidagi talabalar uchun moʻljallangan boʻlib, hisoblash matematikasining amaliy jihatlarini oʻrganishda qoʻl keladi.

Kalit so’zlar: Interpolyatsiya, interpolyatsion formula, interpolyatsiya tuguni, tizm, tizim determinanti, oshkor ko`rinish, fundamental ko`pxad, interpolyatsion ko`pxad, Lagranj ko`pxadi, interpolyatsiya koldik xadi, ektrapolyatsiya, teskari interpolyatsiya.

Kirish

LAGRANJNING INTERPOLYATSION FORMULASI

Topilishi lozim bo`lgan ko`pxadning ko`rinishini quyidagicha olaylik:

$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

bu erda a_i $(i = 0,1,2, ..., p)$ — noma`lum o`zgarmas koeffitsientlar. Shartga ko`ra $L_n(x)$ funktsiya x_0, x_1, ..., x_n interpolyatsiyalash tugunlarida qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan xoldan quyida-gilarni topish mumkin:

x_0 interpolyatsiya tugunida

$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n$

va nixoyat x_n interpolyatsiya tugunida

$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n$

Ushbu ifodalarni tenglamalar tizimi ko`rinishida yozsak:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

bu erda x_i va y_i (1=0,1,2, ..., *p)* – berilgan funktsiyaning jadval qiymatlari. Bu tizimning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 x_0 x_0^2 x_0^3 \ldots x_0^n \\ 1 x_1 x_1^2 x_1^3 \ldots x_1^n \\ \ldots \ldots. \ldots \ldots \ldots \\ 1 x_n x_n^2 x_n^3 \ldots x_n^n \end{vmatrix}$$

x_0, x_1, x_2, ..., x_n tugunlar ustma-ust tushmagan xolda noldan farqli bo`ladi. Masala mazmunidan ravshanki, $x_0$, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham tizim va shu bilan birga qo`yilgan interpolyatsiya masalasi yagona echimga ega. Bu tizimni echib, a_0, a_1, ..., a_n larni topib (4.15) ga kuysak, $L_n(x)$ ko`pxad aniqlanadi. Biz $L_n(x)$ ning oshkor ko`rinishini topish uchun boshqacha yo`l tutamiz. Avvalo fundamental ko`pxadlar deb ataluvchi $Q_i(x)$ larni, ya`ni

$$Q_i(x_j) = \delta_{ij} \begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq j \text{ булганда} \\ 1, & \text{агар } i = j \text{ булганда} \end{cases}$$

shartlarni kanoatlantiradigan n-darajali ko`pxadlarni ko`ramiz.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i Q_i(x)$$

izlanayotgan interpolyatsion ko`pxad bo`ladi. Shartni kanoatlantiruvchi ko`pxad

$$Q_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

ISSN 2181-3187

ko`rinishida bo`ladi.

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\cdot y_i$$

ko`rinishdagi Lagranj interpolyatsion formulasiga ega bo`lamiz.

Bu formulaning xususii xollarini ko`raylik:

n=1 bo`lganda Lagranj ko`pxadi ikki nuqtadan utuvchi to`g'ri chiziq tenglamasini beradi:

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_1-x_0}y_0+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}y_1$$

Agar *p*=2 bo`lsa, u xolda kvadratik interpolyatsion ko`pxadga ega bo`lamiz, bu ko`pxad uchta nuqtadan utuvchi va xertikal ukka ega bo`lgan parabolani aniqlaydi:

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

Lagranj interpolyatsion formulasining boshqa ko`rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

ko`pxadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{i\neq k}(x-x_1)\right]$$

Kvadrat kavs ichidagi ifoda $x = x_i$, va k≠j bo`lganda nolga ylanadi, chunki ($x_j$ - $x_i$) ko`paytuvchi katnashadi. Demak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x_j)=\prod_{i\neq j}(x-x_1)$$

Shuning uchun ham, $\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_1)}{(x_j-x_i)}$ Lagranj koeffitsientini

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega^{`}_{n+1}(x_j)(x-x_j)}$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bunda esa Lagranj ko`pxadi quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega^{`}_{n+1}(x_j)(x-x_j)}$$

Endi tugunlar bir xil o`zoklikda joylashgan $x_1$-$x_0$ =$x_2$–$x_1$ = … =$x_n$–$x_{n-1}$=h xususiy xolniko`ramiz.

Bu xolda soddalik uchun x=x_0+th almashtirish bajaramiz, u xolda

$$x-x_j=h(t-j),\qquad \omega_{n+1}(x)=h^{n+1}\omega^{*}_{n+1}(t).$$

bu erda

$$\omega^{*}_{n+1}(t)=t(t-1)\dots(t-n),\ \ \omega^{*}_{n+1}(x_j)=(-1)j!\ (h-j)!h^{n}$$

bo`lib, (4.21) Lagranj interpolyatsion ko`pxadi quyidagi ko`rinishni oladi:

$$L_n(x+th)=\omega^{*}_{n+1}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!}$$

Endi Lagranj interpolyatsion formulasining koldik, xadini baxolashni ko`ramiz. Agar biror [*a,b*] oraliqda berilgan *f (x)* funktsiyani $L_n$(x) interpolyatsion ko`pxad bilan almashtirsak, ular interpolyatsiya tugunlarida o`zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa bir-biridan farq kiladi. Shuning uchun koldik xadning R(x) = f (x) - $L_n$(x) ko`rinishini topish va uni baxolash bilan shurullanish maqsadga muvofik. Buning uchun interpolyatsiya tugun-larini o`z ichiga oladigan [*a,b*] oraliqda f (x) funktsiya (n+1) tartibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz kilamiz. Interpolyatsiyaning koldik xadi R(x) uchun quyidagi teorema urinlidir:

Teorema. Agar f(x) funktsiya [a,b] oraliqda (n+1)tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lsa, u xolda interpolyatsiya koldik, xadini

$$f(a)-L_n(x)=R(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}$$

ko`rinishda ifodalash mumkin. Bu erda $\xi \in [a,b]$ bo`lib, umuman aytganda x ning funktsiyasidir.

M i s o l . Agar ln100, 1n101, 1n102, 1n103 larning qiymatlari ma`lum bo`lsa, Lagranjning interpolyatsiey formulasi yordamida 1n100,5 ni qanday aniqlikda kisoblash mumkin?

Y e c h i s h . Lagranj interpolyatsion formulasining koldik xadi, agar n=3 bo`lsa, quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Bizning xolda $x_0=100$, $x_1=101$, $x_2=102$, $x_3=103$, $x=100{,}5$; $100<\xi<100{,}5$. CHunki $f(x) = \ln x$ u xolda $f^{(4)}(x)=-\frac{6}{x^4}$. Shunday kilib,

$$|R(100{,}5)| \le \frac{6}{(100)^4\cdot 4!}\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}5\cdot 2{,}5=0{,}23\cdot 10^{-8}$$

EKSTRAPOLYATSIYA

Ekstrapolyatsiya. ekstrapolyatsiya, ya`ni argumentning jadvaldagi qiymatlaridan tashqari qiymatlarida funktsiyaning qiymatini topish masalasi ustida tuxtalib utamiz. ekstrapolyatsiyalash odatda, jadvalning bir-ikki kadami mikyosida bajariladi. CHunki argu-mentning jadvaldagi qiymatidan o`zokrok qiymatida ekstrapolya-tsiyalanganda xato ortib ketadi. Jadval boshida ekstrapolyatsiyalash uchun N'yutonning birinchi interpolyatsion formulasi qo`llanilib, jadval oxirida esa ikkinchisi qo`llaniladi. Interpolyatsion ko`p-xadning tartibi odatda jadvalning amaliy o`zgarmas ayirmalar-ining tartibiga teng kilib olinadi.

M i s o l . jadvaldan foydalanib x=1,210 va x = 1,2638 nuqtalar uchun ko`pxadning ko`rinishi aniqlansin.

jadval;

x	$y = f(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	7232	-831	95
1,220	0,113276	6395	-742	93
1,225	0,119671	5653	-649	93
1,230	0,125324	5004	-556	91
1,235	0,130328	44448	-465	90
1,240	0,134776	3983	-375	88
1,245	0,138759	3608	-287	87
1,250	0,142367	3321	-200	
1,255	0,145688	3121		
1,260	0,148809			

Y e h i s h . Jadvaldagi uchinchi tartibli ayirma amalda o`zgarmasdir. Shuning uchun ham uchinchi tartibli interpolyatsion formuladan foydalanamiz. Jadval boshida va oxirida ekstrapolyatsiyalash uchun formulalar quyidagicha yoziladi:

$$P_3(x) = 0{,}106044 + 0{,}007232\,q + (-0{,}000837)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000095\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}$$

$$P_3(x) = 0{,}148809 + 0{,}003121q + (-0{,}000200)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000087\cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}$$

Birinchi formulaga $q = (x - x_0)/h = \dfrac{1{,}210 - 1{,}215}{0{,}05} = -1$

qiymatni kuysak:

ISSN 2181-3187

$$y(1{,}210) \approx 0{,}106044 + (-1)\cdot 0{,}007232 + \frac{(-1)\cdot(-2)}{2}\cdot(-0{,}000837) +$$
$$+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\cdot 0{,}000095 = 0{,}097880$$

Shunga o`xshash $q = \frac{x - x_4}{h} = \frac{1{,}2638 - 1{,}260}{0{,}005} = 0{,}76$ ni ikkinchi formulaga kuysak,

$$y(1{,}2638) \approx 0{,}148809 + 0{,}76\cdot 0{,}003121 + \frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}\cdot(-0{,}000200) +$$
$$+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{3!}\cdot 0{,}0000535 = 0{,}1511007$$

3. TESKARI INTERPOLYATSIYA

Teskari interpolyatsiya. Shu paytgacha *y=f(x)* funktsiyaning jadvali berilgan xolda argumentning berilgan qiymati *x* da funktsiyaning taqribiy qiymatini topish masalasi bilan shugul-landik. Teskari interpolyatsiya masalasi quyidagicha qo`yiladi: *y=f(x)* funktsiyaning berilgan $\bar{u}$ qiymati uchun argumentning shunday $\bar{x}$ qiymatini topish kerakki, $f(\bar{x})\ \bar{y}$ bo`lsin. Faraz kilaylik, jadvalning karalayotgan oraligida *f (x)* funktsiya monoton va demak, bir qiymatli teskari funktsiya $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ mavjud bo`lsin. Bunday xolda teskari interpolyatsiya $\varphi(y)$ funktsiya uchun odatdagi interpolyatsiyaga keltiriladi. $x=\varphi(y)$ qiymatni topish uchun Lagranj yoki N'yutonning tugunlari har xil o`zoklikda joylashgan xol uchun formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, Lagranjning interpolyatsion formulasi

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{j\neq i} \frac{y - y_i}{y_i - y_j}$$

ko`rinishga ega bo`lib, koldik xadi

$$\varphi(y) - L_n(y) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}\prod_{i\neq K}^{n}(y - y_i)$$

bo`ladi.

ISSN
2181-3187

Agar *f(x)* monoton bo`lmasa, yuqoridagi formula yaramaydi. Bunday xolda u yoki bu interpolyatsion formulani yozib, argumentning ma`-lum qiymatlaridan foydalanib va funktsiyani ma`lum deb hisoblab, hosil bo`lgan tenglama u yoki bu usul bilan argumentga nisbatan echiladi.

Xulosa

Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi [*a,b*] kesmaning boshlangich nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning oxirgi nuqtalarida ekstrapolyatsiyalash uchun, ikkinchi formulasi esa kesmaning oxirgi nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning boshlangich nuqtalarida ekstropolyatsiyalash uchun qo`llaniladi. Shuni ham aytish lozimki, ekstrapolyatsiyalash interpolyatsiyalashga karaganda kattarok xatoliklar beradi, ya`ni uning qo`llanish chegarasi cheklangan. Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalarini bir-birlari bilan solishtirsak quyida-gilar bilan farqlanishini ko`ramiz:

Lagranj formulasidagi har bir xad teng xukukli n-tartib-li ko`pxaddan iborat. Shuning uchun avvaldan (hisoblanmasdan avval) birorta xadini tashlab yubora olmaimiz. N'yuton formu-lasining xadlari esa darajasi oshib boruvchi ko`pxadlardan iborat bo`lib, ularning koeffitsientlari faktoriallarga bo'lingan chekli ayir-malardan iborat. Shuning uchun N'yuton formulasidagi kichik koeffitsientlar oldidagi xadlarni tashlab yuborishimiz mumkin. Ya`ni bu xolda funktsiyaning oraliq qiymatlarini yetarli aniqlikda sodda interpolyatsion formulalardan foydalanib hisoblash mumkin.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. *Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O`zbekiston", 2003*
2. *Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "O`zbekiston", 1997*
3. *Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.*
4. *Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.*

5. *Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel'noy matematike» M. VSh. 1990.*

6. *Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.*

7. *Siddiqov A. «Sonli usullar va programmalashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.*

8. *Internet ma`lumotlarini olish mumkin bo`lgan saytlar:*

www.exponenta.ru

www.lochelp.ru

www.math.msu.su

www.colibri.ru