ISSN 2181-3187

INTERPOLYATSION KVADRATUR FORMULALAR

A.I.Ismoilov
amaliy matematika va informatika
kafedrasi katta o‘qituvchisi.
Fizika-matematika fanlari
bo‘yicha falsafa doktori(PhD)
e-mail: ismoilovaxrorjon@yandex.com
Xudoyberdiyev Nozimbek Zarifjon o‘g‘li
Farg‘ona Davlat Universiteti Amaliy matematika
yo‘nalishi 3-kurs talabasi 22-08-guruh talabasi
e-mail: nozimbekxudoyberdiyev55@gmail.com

Annotatsiya

Maqola interpolyatsion kvadratur formulalarga bag‘ishlangan bo‘lib, unda eng sodda kvadratur formulalar – to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari batafsil yoritilgan. Ushbu formulalarning qurilish usullari, ularning aniqlik darajalari va qoldiq hadlari tahlil qilinadi. To‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko‘phadlar uchun aniq bo‘lsa, Simpson formulasi uchinchi darajali ko‘phadlarni aniq integrallashi ko‘rsatilgan. Shuningdek, interpolyatsion kvadratur formulalarning umumiy xususiyatlari, algebraik aniqlik darajasi va ularning simmetrik tugunlar bilan bog‘liq xossalari o‘rganiladi.

Kalit so‘zlar: interpolyatsion kvadratur formulalar, to‘g‘ri to‘rtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, Simpson formulasi.

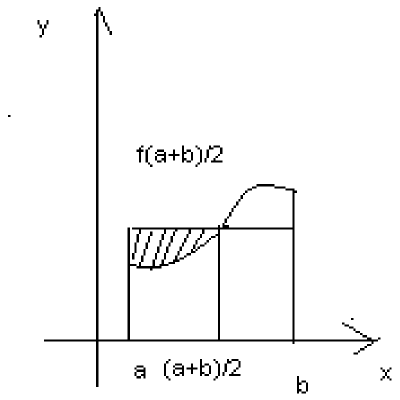
Kirish

ISSN 2181-3187

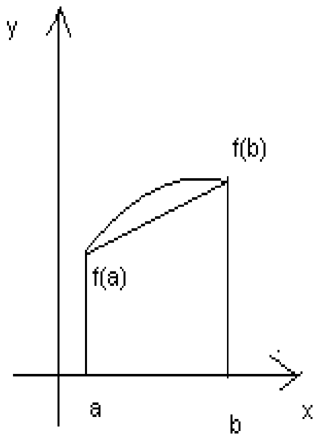
Eng sodda kvadratur formulalar: to‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari. Eng sodda kvadratur formulalarni oddiy mulohazalar asosida qurish mumkin.

Aytaylik, $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. Agar qaralayotgan oraliqda *f(x)* $\approx$const bo`lsa, u vaqtda

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad (1)$$



1-rasm



2-rasm

deb olishimiz mumkin (1-rasm). Bu formula *to`g`ri to`rtburchaklar formulasi* deyiladi.

Faraz qilaylik, *f(x)* funksiya chiziqli funksiyaga yaqin bo`lsin, u holda tabiiy ravishda integralni balandligi (*b* - *a*) ga va asoslari *f(a)* va *f(b)* ga teng bo`lgan trapetsiya yuzi bilan almashtirish mumkin (2-rasm), u holda

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \qquad (2)$$

deb olishimiz mumkin. Bu formula *trapetsiya formulasi* deyiladi. Nihoyat, *f(x)* funksiya [*a*, *b*] oraliqda kvadratik funksiyaga yaqin bo`lsin, u holda $\int_a^b f(x)dx$ taqribiy ravishda *Ox* o`qi va *x*=*a*, *x*=*b* to`g`ri chiziqlar hamda $y = f(x)$ funksiya grafigining absissalari $x = a,\ x = \frac{a+b}{2}\ va\ x = b$ bo`lgan nuqtalaridan o`tuvchi ikkinchi tartibli

ISSN 2181-3187

parabola orqali chegaralangan yuza bilan almashtirish mumkin (3-rasm), u holda quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left\{ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right\} \quad (3)$$

Bu formulani ingliz matematigi Simpson 1743 yilda taklif etgan edi.Bu formulaning hosil qilinishi usulidan ko`rinib turibdiki, u barcha ikkinchi darajali

$$P_2(x) = a_0 + a_x x + a_2 x^2$$

ko`phadlar uchun aniq formuladir. Shunday qilib, biz uchta eng sodda kvadratur formulalarga ega bo`ldik. (1) formulani tuzishda u o`zgarmas son *f(x)*= *c* ni aniq integrallashini talab qilgan edik. Lekin u *f(x)*= $a_0$ + $a_1 x$ chiziqli funksiyani ham aniq integrallaydi, chunki: $(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ balandligi *(b-a)* va o`rta chiziqi $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ bo`lgan ixtiyoriy trapetsiyaning yuziga teng.

Shunga o`xshash *Simpson formulasi* ham biz kutgandan ko`ra ham yaxshiroq formuladir. U uchinchi darajali $P_2(x) = a_0 + a_x x + a_2 x^2 + a_3 x$ ko`phadlarni ham aniq integrallaydi.

Haqiqatan ham, uchinchi darajali $P_3(x)$ ko`phadni quyidagicha

$$P_3(x) = a_0 + a_x x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = P_2(x) + a_3 x^3$$ yozamiz:

u vaqtda

$$\int_a^b P_3(x)dx = \int_a^b P_2(x)dx + a_3 \int_a^b x^3 dx = P_2(x)dx + (a_3/4)(b^4 - a^4) \qquad (4)$$

Lekin bizga ma`lumki,

ISSN 2181-3187

$$\int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[P_2(a) + 4P_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + a_3 b^3\right] \qquad (5)$$

Ikkinchi tomondan,

$$\frac{a_3}{4}(b^4 - a^4) = \frac{b-a}{6}\left\{a_3 a^3 + 4a_3\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + a_3 b^3\right\} \qquad (6)$$

ayniyat o`rinlidir . Endi (5) - (6) ni (4) ga qo`yib,

$$\int_a^b P_3(x)dx = \frac{b-a}{6}\left\{P_3(a) + 4P_3\left(\frac{a+b}{2}\right) + P_3(b)\right\}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, biz uchta kvadratur formulani ko`rdik. Ulardan ikkitasi to`g`ri to`rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko`phad uchun aniq formula bo`lib, Simpson formulasi uchinchi darajali ko`phad uchun aniq formuladir.

To`g`ri to`rtburchak , trapetsiya va Simpson formulalarining qoldiq hadlari. Endi yuqorida qurilgan kvadratur formulalarning qoldiq hadlarini aniqlash bilan shug`ullanamiz. To`g`ri to`rtburchak formulasining qoldiq hadi

$$R_0(f) = f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ni topish uchun *f(x)* funksiya [*a*, *b*] oraliqda ikkinchi tartibli uzluksiz *f''(x)* hosilaga ega bo`lsin deb faraz qilamiz. U holda Teylor formulasiga ko`ra:

$$f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)f'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\varsigma)$$

bu yerda $x \le \varsigma = \varsigma(x) \le \frac{a+b}{2}$ Bu tenglikning har ikkala tomonini *a* dan *b* gacha integrallasak

ISSN 2181-3187

$$R_0(f)=\frac{1}{2}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f''(\varsigma)dx \qquad (7)$$

kelib chiqadi, chunki $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0.$ Quyidagicha belgilash kiritaylik:

$$m=\min_{a\le x\le b} f''(x), M=\max_{a\le x\le b} f''(x)$$

Integral ostidagi funksiya $\left(x\frac{a+b}{2}\right)^2$ o`z ishorasini saqlaydi, shuning uchun (7) integralga umumlashgan o`rta qiymat haqidagi teoremani qo`llash mumkin:

$$R_0(f)=L\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx=L\frac{(b-a)^3}{24} \qquad (8)$$

bunda $m\le L\le M$, $f'(x)$ uzluksiz bo`lgan uchun Koshi teoremasiga ko`ra shunday ξ, $a\le\xi\le b$ topiladiki, *L*= $f''(\xi)$. *E*ndi (8) tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$R_0(f)=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi) \qquad (9)$$

Bu esa qoldiq hadning izlanayotgan ko`rinishidir.

Endi trapetsiya formulasining qoldiq hadini topaylik. Buning uchun *f(x)* funksiyani *x* = *a* va *x* = *b* nuqtalardagi qiymatlari yordamida interpolyatsiyalab, interpolyatsion formulani qoldiq hadi bilan yozamiz:

$$f(x)-L_1(x)=\frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\varsigma)$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini *a* dan *b* gacha integrallaymiz, natijada

$$R_1(f)=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(\varsigma)dx$$

ISSN 2181-3187

hosil bo`ladi. Bu yerda [*a*,*b* ] oraliqda $(x-a)(x-b)\leq 0$ bo`lgani uchun $R_1(f)$ integralga o`rta qiymat haqidagi umumlashgan teoremani qo`llash mumkin:

$$R_1(f)=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b(x-a)(x-b)dx=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)(a\leq\xi\leq b) \quad (10)$$

Nihoyat, Simpson formulasining qoldiq hadini aniqlaylik. Buning uchun

$c=0,5(a+b)$ deb olib, quyidagi

$H(a)=f(a),\ H(c)=f(c),$ shartlarni qanoatlantiruvchi Ermit interpolyatsion ko`phadini tuzamiz:

$$H(x)=\frac{4}{(a-b)^3}\left[(x-c)^2(x-b)f(a)-(x-a)(x-b)(a-b)f(c)-\right.$$
$$\left.-(x-a)(x-b)(x-c)(a-b)f'(c)-(x-a)(x-c)^2f(b)\right]$$

Ravshanki,

$$\int_a^b H(x)dx=\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Endi funksiyalarni interpolyatsiyalashga ko`ra $f(x)=H(x)+r(x)$ interpolyatsion formulaning qoldiq hadi $r(x)=\frac{1}{24}\Omega(x)f^{IV}(\varsigma) \quad (a\leq\varsigma\leq b)$

bo`lib, bu yerda $\Omega(x)=(x-a)(x-c)^2(x-b)$.

Demak, (3) formulaning qoldiq hadi $R_2(f)=\frac{1}{24}\int_a^b\Omega(x)f^{IV}(\varsigma)dx$

bo`lib, $\Omega(x)$ ko`phad [*a*, *b*] oraliqda o`z ishorasini saqlaydi va umumlashgan o`rta qiymat teoremasiga ko`ra $R_2(f)=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{IV}(\xi)\ (a\leq\xi\leq b)$ ga ega bo`lamiz.

ISSN 2181-3187

Qoldiq hadlar uchun chiqarilgan formulalar yana bir bor shuni ko`rsatadiki, to`g`ri to`rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko`phadlar uchun aniq bo`lib, Simpson formulasi uchinchi darajali kop`hadlar uchun aniq formuladir.

Interpolyatsion kvadratur formulalar. Bundan keyin qisqalik uchun kvadratur formulaning $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ koeffisiyentlari va $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ tugunlarini yuqori indekssiz A$_1$, A_2, ... A_n va $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ko`rinishda yozamiz. Faraz qilaylik, bizga $f(x)$ funksiyaning $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nuqtalardagi $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ qiymatlari berilgan bo`lib, maqsad shu qiymatlar bo`yicha integralning taqribiy qiymatini mumkin qadar yuqori aniqlikda topishdan iborat bo`lsin. Demak A_κ koeffisiyentlar aniqlanishi kerak. Buning uchun $f(x)$ni uning berilgan qiymatlaridan foydalanib, $(n$-1) - darajali ko`phad bilan interpolyatsiyalaymiz:

$$f(x) = L_{n-1}(x) + r_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} f(x_k) + r_n(f,x) \quad (11)$$

Endi bu tenglikni $\rho\ (x)$ ga kupaytirib, a dan b gacha integrallaylik.

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) r_n(f,x) dx$$

Agar bundagi

$$R_n(f) = \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b \rho(x) r_n(f,x) dx \qquad (12)$$

qoldiq hadni tashlasak:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k==1}^{n} A_k f(x_k), A_k = \int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx \qquad (13)$$

kvadratur formulaga ega bo`lamiz.

ISSN 2181-3187

Bu formula qurilish usuliga ko`ra *interpolyatsion kvadratur formula* deyiladi. Bunday formulalar uchun ushbu teorema o`rinlidir.

Teorema. Quyidagi

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (14)$$

kvadratur formulaning interpolyatsion bo`lishi uchun uning barcha ($n$-1) - darajali algebraik ko`phadlarni aniq integrallashi zarur va kifoyadir.

Kifoyaligi. (14) formula (n - 1) - darajali ixtiyoriy ko`phad uchun aniq formuladir. Xususiy holda, (n - 1) -darajali ushbu:

$$\omega_m(x) = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_m - x_i}. \qquad (m = 1, 2, ..., n)$$

ko`phad uchun ham aniq bo`ladi. Agar $\omega_m(x_k)=0$ $(\kappa \neq m)$ va $\omega_m(x_m) = 1$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int_a^b \rho(x) \prod_{i=1, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} dx = \int_a^b \rho(x)\omega_m(x) dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \omega_m(x_k) = A_m$$

kelib chiqadi. Demak (14) qoida interpolyatsiondir, shu bilan teorema isbot bo`ldi.

Bu teoremadan ko`rinadiki, $n$ nuqtali interpolyatsion kvadratur formulaning algebraik aniqlik darajasi ($n$-1) dan kichik bo`lmasligi kerak.

Osongina ishonch hosil qilish mumkinki, yuqorida ko`rib o`tilgan to`g`ri to`rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari interpolyatsion kvadratur formulalardir. Ma`lumki, $f(x)$ [a, b) oraliqda n-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lsa, u holda interpolyatsion formulaning qoldiq hadi $r_n(f, x)$ ni

$$r_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(\varsigma)}{n!} \omega(x), \omega(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Buni (12) ga qo`yib, kvadratur formula uchun R

$$_n(f)=\frac{1}{n!}\int_a^b \rho(x)\omega(x)f^{(n)}(\varsigma)dx \qquad (15)$$

ga ega bo`lamiz. Endi n-tartibli uzluksiz hosilaga ega va hosilasi

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M_n \qquad (16)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfini qaraymiz. Bunday funksiyalar uchun (2.15) dan

$$\left|R_n(f)\right|\le\frac{M_n}{n!}\int_a^b\left|\rho(x)\omega(x)\right|dx \qquad (17)$$

ga ega bo`lamiz. Agar $\omega(x)$ ko`phad $[a,b]$ oraliqda o`z ishorasini saqlasa, u holda (17) baho aniq bo`lib, undagi tenglikka

$$f(x)=\frac{M_n}{n!}x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

ko`phadda erishiladi. Endi interpolyatsion kvadratur formulalarning bir muhim xossasini ko`rib o`taylik. Avval $A_к$ ni aniqlaydigan integralda $x=\frac{a+b}{2}t+\frac{b-a}{2}t$ almashtirish bajaramiz. Agar

$$\rho\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t\right)=\bar{\rho}(t)$$

deb belgilasak , u holda $A_к$ quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$A_k=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\bar{\rho}(t)\prod_{i=1,i\ne k}^{n}\frac{t-t_i}{t_k-t_i}dt=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}\bar{\rho}(t)\frac{\omega(t)dt}{(t-t_k)\omega'(t_k)}=\frac{b-a}{2}B_k$$

bu yerda

ISSN 2181-3187

$$B_k = \int_{-1}^{1} \bar{\rho}(t) \frac{\omega(t)dt}{(t-t_k)\omega'(t_k)} \quad (18)$$

va

$$t_k = \frac{2x_k - a - b}{b-a}$$

$$\int_a^b \rho(x) f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{n} B_k f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_k\right) \quad (19) \quad c = 0,5(a+b)$$

ko`rinishga keladi.

Teorema. Faraz qilaylik, vazn funksiyasi $\rho(x)$ $[a,b]$ oraliqning o`rta nuqtasiga nisbatan juft funksiya va $t_k$ tugunlar shu nuqtaga nisbatan simmetrik, ya`ni $t_k = -t_{n+1-k}$ bo`lsin. U holda simmetrik tugunlarga mos keladigan kvadratur formulaning koeffisiyentlari o`zaro teng bo`ladi:

$$B_k = B_{n+1-k} \quad (20)$$

Nyuton-Kotes kvadratur formulalari. Nyuton-Kotes formulalari eng dastlabki interpolyatsion kvadratur formulalardan hisoblanadi. Bu formulalarda oraliq chekli, vazn funksiyasi $\rho(x) \equiv 1$ va x_i tugunlar o`zaro teng uzoqlikda joylashgandir. Bu formula (13) formulaning $\rho(x) \equiv 1$ bo`lgandagi xususiy holidir.

Lekin aksariyat adabiyotlarda Nyuton-Kotes formulasi (19) ko`rinishda emas, balki boshqa ko`rinishda keltiriladi. Biz ham shu ko`rinishda qaraymiz.

Buning uchun $[a, b]$ oraliqni

$$x_k^{(n)} = a + kh, k = \overline{0,n}, h = \frac{b-a}{n}$$

ISSN 2181-3187

(n+1) ta nuqtalar yordamida *n* ta bo`lakka bo`lamiz va $A_k^{(n)}$ koeffisiyentlarni tegishli ko`rinishga keltirish uchun

$$A_k^{(n)} = \int_a^b \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^{(n)}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} dx$$

integralda x=a+ th almashtirish bajaramiz,

x-x$_i^{(n)}$ *= (t - i)h, x[ⁿ) - x\ⁿ) = (к- i)h*

bo`lganligi uchun

$$\prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i^{n}}{x_k^{(n)} - x_i^{(n)}} = \frac{(-1\ )^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{i=0, i\neq k}^{n} (t-j).$$

Demak

$$\mathrm{A}_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} h \int_0^n \prod_{j=0, j=k}^{n} (t-j) dt.$$

Endi

$$\mathrm{B}_k^{(n)} = \frac{(-1)n-k}{n \cdot k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (t-j) dt \qquad (21)$$

deb olsak, u holda Nyuton-Kotes formulasi quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} f(a+kh). \qquad (22)$$

Bundagi $B_n^{(k)}$ koeffisiyentlar [*a*, *b*] oraliqqa bog`liq emas. Kotes tomonidan $B_n^{(k)}$ koeffisiyentlar *n =1,2,..., 10* uchun hisoblangan. Quyida ular *n =1,2,..., 5* uchun keltirilgan:

ISSN 2181-3187

$$n{=}1\text{: } B_0^{(1)} = B_1^{(1)} = \frac{1}{2};\ n{=}2\text{: } B_0^{(2)} = B_2^{(2)} = \frac{1}{6},\ B_1^{(2)} = \frac{4}{6};$$

$$n{=}3\text{: } B_0^{(3)} = B_3^{(3)} = \frac{1}{8},\ B_1^{(3)} = B_2^{(3)} = \frac{3}{8};n{=}4\text{: } B_0^{(4)} = B_4^{(4)} = \frac{7}{90},\ B_1^{(4)} = B_3^{(4)} = \frac{32}{90}, B_2^{(4)} = \frac{12}{90};$$

$$n{=}5\text{: } B_0^{(5)} = B_5^{(5)} = \frac{19}{288}, B_1^{(5)} = B_{4_1^{(5)}}^{(5)} = \frac{75}{288}, B_2^{(5)} = B_3^{(5)} = \frac{50}{288}.$$

P.O. Kuzmin $B_k^{(n)}$ lar uchun $n \to \infty$ da asimptotik formulalarni topgan edi. Bu formulalardan, jumladan, $n \to \infty$ da $\sum_{k=1}^{n} \left|B_k^{(n)}\right| \text{—>} \infty$ kelib chiqadi. Endi $\sum_{k=1}^{n} \left|B_k^{(n)}\right| = \frac{1}{b-a}$ $\int_a^b 1dx = 1$ ekanligini hisobga olsak bundan *n* yetarlicha katta bo`lganda koeffisiyentlar orasida manfiylari ham, musbatlari ham mavjudligi ravshan bo`lib qoladi. hatto, $n = 8$ va $n = 10$ bo`lganda ham $B_\kappa^{(n)}$ lar orasida manfiylari mavjuddir. Shuning uchun ham Nyuton-Kotes formulalarini katta *n* larda qo`llash maqsadga muvofiq emas. Ravshanki, $n = 1$ va $n = 2$ bo`lganda (22) formuladan mos ravishda trapetsiya va Simpson formulalari kelib chiqadi. To`g`ri to`rtburchaк formulasi esa $\rho(x) = 1$ va n= 1 bo`lganda (19) formuladan kelib chiqadi. $n = 3$ bo`lganda (22) dan "Sakkizdan uch qoidasi" deb ataluvchi Nyuton formulasiga ega bo`lamiz: $\int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) + f(b)\right]$$

qoldiq hadini hosil qilamiz.

Misol tariqasida $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0{,}693147180\ldots$

integralni taqribiy hisoblaylik. Buning uchun umumlashgan

to`g`ri to`rtburchak formulasidan N= 10 deb olaylik. Bu yerda

ISSN 2181-3187

$h = (b-a)/N =$ 0,1 bo`lgani uchun

$y_{k/2} = 1/(1+(k+0,5)\cdot 0,1)$ bo`lib,

$y_{0,5}$=0,95238; $y_{1,5}$=0,86957;

$y_{2,5}$=0,80000; $y_{3,5}$=0,74074;

$y_{4,5}$=0,68966; $y_{5,5}$=0,64516;

$y_{6,5}$=0,60606;$y_{7,5}$=0,57143; $y_{8,5}$=0,54054;$y_{9,5}$=0,51282

Bundan esa umumlashgan to`g`ri to`rtburchak formulasiga ko`ra:

$$\approx \frac{1}{10}(y_{0,5} + y_{1,5} + ... + y_{9,5}) = 0,692836$$

Bu taqribiy qiymat bilan aniq qiymatning farqi

$$|\ln 2 - 0,692836| < 0,00032$$

Demak ln2 $\approx$ 0,693, bu rahamlar aniqdir.

Ikkinchi misol sifatida ushbu integral sinusning $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}dt$

x=1 nuqtadagi qiymatini umumlashgan Simpson formulasi bilan olti xona aniqlikda topish masalasini qaraylik.

Bu yerda aniqlik berilgan ε = 0,5 • 10^6 bo`lib, so`ngra unga ko`ra umumlashgan Simpson formulasi uchun tegishli *N* ni aniqlash mumkin. Buning uchun Si *(x)* ning 4-tartibli hosilasini baholash kerak. Ravshanki,

$$\frac{\sin x}{x}\int_0^1 \cos uxdu$$

Bundan $\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^1 u^4 \cos uxdu$

ISSN 2181-3187

va

$$\left|\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \le 0\int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}$$

Endi formulaga ko`ra y quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kerak:

$$\frac{1}{2880}\frac{1}{N^4}\cdot\frac{1}{5} \le 0{,}5\cdot 10^{-6}$$ va $$\left|\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right| \le \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}$$

Bundan esa $N \ge 5$ ekanligini topamiz. Shuning uchun ham N= 5 uchun $Si(l)$ ni umumlashgan Simpson formulasi bo`yicha hisoblaymiz. Jadvaldan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$y_0=1$ $y_1=0{,}998330$ $y_2=0{,}993345$ $y_3=0{,}985067$ $y_4=0{,}973545$

$y_5=0{,}958852$ $y_6=0{,}941070$ $y_7=0{,}920311$ $y_8=0{,}896695$

$y_9=0{,}870363$ $y_{10}=0{,}841471$

Aslida $Si(l)$ning olti xona aniqlikdagi qiymati

$$\frac{1}{30}\left[(y_1+y_{10})+4(y_1+y_2+...+y_9)+2(y_2+y_4+...+y_8)\right]=Si(l) \ =0{,}946083$$

xonasidagi oxirgi xona birligidagi farq yaxlitlash xatosi hisobidan kelib chiqqan.

Xulosa

Maqola interpolyatsion kvadratur formulalarning asosiy tushunchalari va amaliy qo‘llanilishini atroflicha yoritadi. To‘g‘ri to‘rtburchak, trapetsiya va Simpson formulalari eng sodda kvadratur formulalar sifatida ko‘rib chiqilib, ularning qurilish usullari va aniqlik darajalari tahlil qilinadi. To‘g‘ri to‘rtburchak va trapetsiya formulalari birinchi darajali ko‘phadlar uchun aniq bo‘lsa, Simpson formulasi uchinchi darajali ko‘phadlarni aniq integrallaydi. Qoldiq hadlarning hisoblanishi formulalarning xatolarini baholash imkonini beradi. Nyuton-Kotes formulalari teng masofali

ISSN 2181-3187

tugunlarga asoslangan interpolyatsion kvadratur formulalar sifatida oʻrganilib, katta tugunlar sonida manfiy koeffisiyentlar tufayli cheklovlarga ega ekanligi koʻrsatiladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул.
–М.: «Наука». -1999г.

2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. 2-е изд. –М.: «Наука». -1972г.
3. Крылов В.Н. Приближённые вычисления интегралов. –М.: «Наука». -1967г.
4. Коробов Н.М. Теоретика – числовые методы в приближённом анализе. –М.: Физматгиз. -1963г.
5. Лануош К. Практические методы прикладного анализа. –М.: Физматгиз. -1961г.