ISSN 2181-3187

PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMAGA KELADIGAN TABIIY JARAYONLAR.

Erdonova Gulmera Ahtamovna

Buxoro muhandislik-texnologiya instituti akademik litseyi

fizika fani o'qituvchisi

Olimova Sayyora Sulaymon qizi

Buxoro muhandislik-texnologiya instituti akademik litseyi

matematika fani o'qituvchisi

Annotatsiya. Ushbu maqola matematik fizika tenglamalari, ularning umumiy yechimlari va ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi haqida qisqacha ma'lumotlar berilgan.

Kalit so'zlar. Oddiy differensial tenglamalar, funksiya, hosila, xarakteristik forma.

Abstract. This article provides brief information about the equations of mathematical physics, their general solutions, and the classification and canonical form of second-order partial differential equations.

Keywords: Ordinary differential equations, function, derivative, characteristic form.

Matematik fizika tenglamalar klassifikatsiyasi. Differensial tenglamalar deb, noma'lumi bir yoki bir necha o‘zgaruvchili funksiya va uning hosilalari bo‘lgan tenglamalarga aytiladi.

Agar tenglamada noma'lum funksiya ko‘p o‘zgaruvchining (o‘zgaruvchi ikkitadan kam bo‘lmasligi kerak) funksiyasi bo‘lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Matematik fizikaning ko‘pchilik masalalari ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarga keltiriladi. Bu tenglamalar, bizning asosiy o‘rganadigan mavzumiz bo‘lgani uchun, bularni sinflarga ajratish, turlarini aniqlash, kanonik ko‘rinishga keltirish bizning asosiy maqsadimiz hisoblanadi.

ISSN 2181-3187

1-ta'rif : x, y erkli o'zgaruvchining $u(x, y)$ noma'lum funksiyasi va funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari orasidagi bog'lanishga, ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar deyiladi.

2-ta'rif: E^2 fazoda ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud qandaydir $u(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsin ($u_{xy} = u_{yx}$). U holda

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \qquad (1)$$

tenglama umumiy holda berilgan xususiy hosilali tenglama deyiladi. Bu yerda F - qandaydir funksiya.

Xuddi shunga o'xshash ko'p erkli o'zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, u_{x1}, u_{x2}, \ldots, u_{xn}, \ldots, u_{xi\,x\,j}, \ldots) = 0 \qquad (2)$$

3-ta'rif : Xususiy hosilali differensial tenglama yuqori tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli deyiladi, agarda u yuqori tartibli hosilalarga nisbatan ushbu ko'rinishga ega bo'lsa:

$$a_{11}(x, y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x, y)\cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \qquad (3)$$

4-ta'rif: Quyidagi ko'rinishdagi tenglamalarga kvazichiziqli tenglamalar deyiladi:

$$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{xy} + a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)\cdot u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = =0 \qquad (4)$$

5-ta'rif : Tenglama chiziqli deyiladi, agarda u barcha xususiy hosilalarga va noma'lum funksiyaning o'ziga nisbatan ham chiziqli bo'lsa, ya'ni quyidagi ko'rinishga ega bo'lsa,

$$a11(x, y)\cdot uxx + 2a12(x, y)\cdot uxy + a11(x, y)\cdot u\,yy + b1(x, y)\cdot ux + b2(x, y)\cdot uy + c(x, y)\cdot u + f(x, y) = 0 \quad (5)$$

Ushbu tenglamada $a11(x, y), a12(x, y), a11(x, y), b1(x, y), b2(x, y), c(x, y)$ - (5) tenglamaning koeffitsientlari, $f(x, y)$ - (5) tenglamaning ozod hadi deyiladi.

ISSN 2181-3187

6-ta'rif : Agar (5) tenglamada $f(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda (5) tenglama bir jinsli tenglama deyiladi. Aks holda, agar $f(x, y) \neq 0$ bo'lsa, (5) tenglama bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama deyiladi.

Biror fizik jarayonni to'la o'rganish uchun, bu jarayonni tasvirlayotgan tenglamalardan tashqari, uning boshlang'ich holatini (boshlang'ich shartlarni) va jarayon sodir bo'ladigan sohaning chegarasidagi holatini (chegaraviy shartlarni) berish zarurdir. Matematik nuqtai nazardan, bu narsa differensial tenglamalar yechimining yagona emasligi bilan bog'liqdir.

Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki, n – tartibli

$$F(x, y, y',..., y(n)) = 0$$

tenglamaning yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liqdir, ya'ni $y = \varphi(x, c1,..., cn)$. Bu o'zgarmaslarni aniqlash uchun noma'lum funksiya $y(x)$ qo'shimcha shartlarni qanoatlantirishi kerak.

Xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun bu masala murakkabroqdir. Bu tenglamalarning yechimi ixtiyoriy o'zgarmaslarga emas, balki ixtiyoriy funksiyalarga bog'liq bo'lib, bu funksiyalar soni tenglamalar tartibiga teng bo'ladi. Ixtiyoriy funksiyalar argumentlarining soni yechim argumentlari sonidan bitta kam bo'ladi.

1-misol. Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping:

$$u_{xy} = 0.$$

Dastlab x bo'yicha, so'ngra y bo'yicha integrallaymiz, natijada

$$u(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$$

yechimni olamiz. Ko'rib turganingizdek, xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimida tenglama tartibiga teng miqdorda, ya'ni ikkita funksiya qatnashayapti, bu funksiyalar argumenti esa yechim argumentlari sonidan bitta kam.

2-misol. Quyidagi tenglamaning ham umumiy yechimini topaylik:

$$u_{xyy} = 0.$$

Yuqoridagidek mulohaza yuritsak, umumiy yechim:

$$u(x, y) = f_1(x)\, y + f_2(x) + f_3(y) .$$

3-misol. Quyidagi tenglamaning ham umumiy yechimini topaylik:

$u_{xyz}=0$.

Yuqoridagidek mulohaza yuritsak, umumiy yechim:

$u(x, y, z) = x \cdot y \cdot f_1(x, y) + x \cdot f_2(x, z) + f_3(y, z)$.

Oxirgi misolda, ko‘rib turganingizdek yechimda tenglama tartibiga mos uchta funksiya qatnashyapti, yechim uch o‘zgaruvchili bo‘lgani uchun bu funksiyalar argumenti ikki o‘zgaruvchili.

Shunday qilib, aniq fizik jarayonni ifodolovchi yechimni ajratib olish uchun qo‘shimcha shartlarni berish zarurdir. Bunday qo‘shimcha shartlar boshlang‘ich va chegaraviy shartlardan iboratdir.

Xarakteristik forma. Ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi va kanonik ko‘rinishi.

Ko‘p erkli o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama qanday kanonik ko‘rinishga keltiriladi? Shu masalani qarab chiqaylik. Ko‘p o‘zgaruvchili chiziqli ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama quyida berilgan bo‘lsin :

$$\sum_{i,j}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f \qquad (6)$$

U holda ushbu tenglamaning xarakteristik formasi kvadratik forma bo‘ladi:

$$Q(\lambda_1, \dots \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j$$

Har bir fiksirlangan *x* nuqtada *Q* kvadratik formani uncha qiyin bo‘lmagan affin almashtirishlari yordamida kanonik ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2 \qquad (7)$$

Bu yerda α_i 1, -1, 0 qiymatlarni qabul qiladi. (7) dagi manfiy va nol koeffisiyentlar *Q* ni kanonik ko‘rinishga keltirish usuliga bog‘liq emas. Shunga asosan (6) tenglama klassifikasiyalanadi:

7-ta’rif : (6) chiziqli tenglama o‘zi aniqlangan qandaydir *D* sohada elliptik, giperbolik yoki parabolik deyiladi, agar har bir $x \in D$ nuqtada (7) dagi α_i koeffisiyentlar mos ravishda: hammasi noldan farqli va bir xil ishorali; hammasi

ISSN 2181-3187

noldan farqli va har xil ishorali; yoki va nihoyat hech bo‘lmasi bittasi (hammasi emas) nol bo‘lsa.

Ko‘p erkli o‘zgaruvchili ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalardan bittasini kanonik ko‘rinishga keltirish usulini qarab chiqaylik. Quyidagi tenglama berilgan bo‘lsin:

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} = 0$$

Ushbu tenglamaga mos xarakteristik kvadratik forma:

$$Q = \lambda_1^2 + 2\,\lambda_1\lambda_2 + 2\lambda_2^2 + 4\lambda_2\lambda_3 + 5\lambda_3^2$$

Bu kvadratik formani, masalan, Lagranj usulidan foydalanib kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$Q = (\,\lambda_1 + \lambda_2)^2 + (\,\lambda_2 + 2\lambda_3)^2 + \lambda_3^2$$

Quyidagi belgilashlar kiritamiz:

$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2$; $\mu_2 = \lambda_2 + 2\lambda_3$; $\mu_3 = \lambda_3$ (*)

va natijada Q formani kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$Q = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$$

Kvadratik formaga qarab tenglamamiz elliptik tipga tegishli deb aytishimiz mumkin. (*) tenglikdan λ larni topib olamiz. Shunday qilib, $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrissali

quyidagi xosmas affin almashtirishlari: $\lambda_1 = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_3$, $\lambda_2 = \mu_2 - 2\mu_3$, $\lambda_3 = \mu_3$ Q formani kanonik ko‘rinishga keltiradi:

$$Q = \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2$$

Berilgan differensial tenglamani kanonik ko‘rinishga keltiradigan xosmas affin almashtirishining matrisasi M matrisaga simmetrik bo‘lgan matrisa bo‘ladi:

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ISSN 2181-3187

bu almashtitish quyidagi ko'rinishga ega: $\xi = x$; $\eta = -x + y$; $\zeta = 2x - 2y + z$. $\xi = x$; $\eta = -x + y$; $\zeta = 2x - 2y + z$.

Shulardan va $u(x, y, z) = v(\xi,\eta)$ belgilashdan foydalanib, quyidagilarni topamiz:

$u_{xx} = v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 4v_{\zeta\zeta} - 2v_{\xi\eta} + 4v_{\xi\zeta} - 4v_{\eta\zeta}$;

$u_{yy} = v_{\eta\eta} + 4v_{\zeta\zeta} - 4v_{\eta\zeta}$; $u_{zz} = v_{\zeta\zeta}$;

$u_{xy} = -v_{\eta\eta} - 4v_{\zeta\zeta} + v_{\xi\eta} - 2v_{\xi\zeta} + 4v_{\eta\zeta}$; $u_{yz} = -2v_{\zeta\zeta} + v_{\eta\zeta}$.

Topilgan ifodalarni tenglamaga etib qo‘yib, soddalashtirishlar bajargandan so‘ng, quyida tenglamaning kanonik ko‘rinishini olamiz: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + v_{\zeta\zeta} = 0$

Parabolik tipdagi tenglamaga keladigan ba'zi bir tabiiy jarayonlar. Matematik modellar universallik xarakteriga ega. Parabolik tipdagi tenglamalar – matematik model universalligiga bitta misol. Ular turli tabiatdagi jarayonlarni ifodalaydi. Shuni ta'kidlashimiz lozimki, parabolik tenglamalar tartibsiz xaotik jarayonlar bilan bog'liq (Issiqlik tarqalishi,diffuziya…). Ammo ular ko'pgina tartiblangan jarayonlarga ham qo'llaniladi (yer osti suvlarining harakati, gazni filtirlash…). Matematik modellarning universalligi bizni o'rab turgan olam birligini anglatadi. Shu sababli ba'zi bir hodisalarning matematik modellari umuman boshqa turdagi jarayonga ham qo'llaniladi.

Parabolik tenglamalar.

Obyekt(jarayon)	Asosiy farazlar va qonunlar
Yer osti suvlarining harakati	Massaning saqlanishi, Darsiy qonuni
Issiqlik tarqalishi, diffuziya hodisasi	Energiyaning saqlanishi, Fur'ye qonuni, massaning saqlanishi, Fuk qonuni

ISSN 2181-3187

Amyobalarning to’planishi	Energiyaning saqlanishi, Fur’ye qonuni, massaning saqlanishi, Fuk qonuni
Tasodifiy Markov jarayoni	Markov ayniyati, jarayonning kuchli uzluksizligi
Iyerarxiya hokimiyatining taqsimlanish dinamikasi	Qonunga bo’ysunuvchanlik, iyerarxiyada hokimiyatning qayta taqsimlanish mexanizmi postulatlari.

Quyida ba’zi bir parabolik tipdagi tenglamaga keladigan tabiiy jarayonlarni ko’rib chiqamiz:

Issiqlik tarqalish tenglamasi. Koʻndalang kesim oʻlchamlari uzunlik oʻlchamiga nisbatan juda kichik bulgan ingichka toʻgʻri brus sterjen deb ataladi. Sterjen silindrik yoki prizmatik formada boʻlib, koʻndalang kesim yuzi hamma joyda bir xil. Faraz qilaylik, bir jinsli, temperaturasi vaqt oʻtishi bilan oʻzgaradigan metall sterjen berilgan boʻlib, uning yon sirti va uchlari tashqi muhit bilan issiqlik almashmaydigan boʻlsin. Agar sterjen boshlagʻich holatda notekis isitilgan boʻlsa, issiqlik tarqalish hodisasiga koʻra uning koʻproq isigan qismidan kamroq isigan qismiga issiqlik tarqaladi va vaqt oʻtishi bilan uning hamma joyida temperatura bir xil boʻladi. Agar x o’qni sterjen uki bo’ylab yo’naltirsak, u holda u temperatura x koordinata va t vaqtning funksiyasi boʻladi, ya’ni u = u(x,t). Oʻzgarmas t uchun u(x,t) sterjenning ixtiyoriy x koordinataga mos koʻndalang kesimidagi nuqtaning

shu paytdagi temperaturasini aniqlaymiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

xususiy hosila esa x o’q bo’ylab temperaturaning oʻzgarish tezligini ifodalaydi.

ISSN 2181-3187

Agar x ni o‘zgarmas deb qaralsa, u(x,t) funksiya sterjenning x ga mos kelgan ko‘ndalang kesimida vaqt o‘tishi bilan temperaturaning o‘zgarish qonunini ifodalaydi.

Issiqlik tarqalish tenglamasini chiqarish uchun fizikaning quyidagi issiqlik tarqalishi bilan bog‘liq bo’lgan qonuniyatlaridan foydalanamiz.

1. Sterjenning ko‘ndalang kesimidan dt vaqt ichida o’tgan issiqlik miqdori shu kesim yuziga, temperaturaning kesim yuziga perpendikulyar yo’nalashdagi o‘zgarish tezligiga va dt vaqt oralig’iga proporsionaldir. Bu miqdorni dQ desak,

$$dQ = -kS\frac{\partial u}{\partial x}dt \qquad (8)$$

bunda k - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti, S - ko‘ndalang kesim yuzi. (8) formuladagi minus shuni anglatadiki, agar issiqlik oqimi x o’qning musbat yo‘nalishi bo‘yicha tarqalsa, issiqlik miqdori musbat deb hisoblanadi. Agar $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$

bo‘lsa, u holda x o’sishi bilan temperatura oshib boradi va issiqlik sterjenning ko‘prok isigan qismidan kamroq isigan qismiga qarab tarqaladi va demak, issiqlik oqimi x ning kamayish tomoniga yo’naladi, ya’ni uning miqdori manfiy bo‘ladi. Biz bir jinsli va temperaturasi vaqt o‘tishi bilan sekin o‘zgaradigan sterjenni qarayotganimiz uchun issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsienti k = const bo‘ladi.

2. Sterjenga uning ichidagi temperaturani dt vaqt ichida du ga oshirish uchun beriladigan issiqlik miqdori

$$dQ = c\rho V du \qquad (9)$$

ga teng, bu yerda c - sterjenning issiqlik sig‘imi, ρ - uning zichligi, V - qaralayotgan sohaning hajmi.

Berilgan sterjenda x **va** $x + dx$ **absissalarga mos kelgan ko‘ndalang kesimlar orasidagi sohachani ajratamiz va uning uchun issiqlik balansi (muvozanati)**

tenglamasini tuzamiz. (8) formulaga ko‘ra x **absissali ko‘ndalang kesimdan** dt **vaqt ichida**

kirgan issiqlik miqdori $-kS(\frac{\partial u}{\partial x})_x dt$ **,shu vaqt ichida** ***x+dx*** **abssisali ko’ndalang kesimdan kirgan issiqlik miqdori** $-kS(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+dx} dt$ **ga teng.** ***dt*** **vaqtda qaralayotgan sohacha ichida saqlangan issiqlik miqdori yuqoridagi issiqlik miqdorlarining ayirmasiga teng bo’ladi, ya’ni**

$$-kS(\frac{\partial u}{\partial x})_x dt + kS(\frac{\partial u}{\partial x})_{x+dx} dt$$

Bu esa cheksiz kichik aniqlik bilan

$$dQ = kS\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dxdt \qquad \textbf{(10)}$$

Ikkinchi tomondan, ***dt*** **vaqtda temperaturaning o’zgarishini** $du = \frac{\partial u}{\partial t}dt$ **desak, shu vaqtda qaralayotgan sohacha ichidagi issiqlik miqdori (9) ga ko’ra**

$$dQ = c\rho V dx\frac{\partial u}{\partial t}dt \qquad \textbf{(11)}$$

ga teng bo‘ladi (bu yerda $V = Sdx$ **). (2.2.3) va (2.2.4) larni tenglashtirib,**

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerdan (10) va (11) tenglamalarni tenglashtirib,

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \textbf{(12)}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerda $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ **belgilash kiritsak, bir jinsli sterjen uchun issiqlik tarqalish tenglamasiga ega bo’lamiz:**

$$\boldsymbol{\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \textbf{(13)}$$

bunda $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$ **issiqlik o’tkazuvchanlik koeffitsiyenti deyiladi. (13) tenglama bir**

ISSN 2181-3187

o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglama bo'lib, issiqlik tarqalish tenglamasi deyiladi. U chiziqli va bir jinslidir.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры, Москва: «Наука». 1997.
2. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения Новосибирск: «Научная книга». 1998.
3.Блохин А.М., Доровский В.Н. Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. СО РАН, Новосибирск, 1994.
4. Годунов С.К. г., ст. Элементы механики сплошной среды. М., «Наука», 1978
5. Colella, E.G. Puckett Modern Numerical Method for Fluid Flow. Internet resources, E-mail: egpuckett@ucdavis.edu
6. Самарский А. А. Теория разностных схем: Учебное пособие. – 2-е изд. – М.: Наука, 1983.
7.Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – 6-е изд. – М.: Наука, 1999.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
9. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1984.
10. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.