AKADEMIK LITSEY MATEMATIKA KURSIDA IRRATSIONAL TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLARNI O'QITISH METODIKASI.

Xudoyberdiyev Jahongir Orifovich

Shahrisabz "Temurbeklar maktabi"
harbiy akademik litseyi matematika fani
o'qituvchisi

Annotatsiya: Ushbu maqola bugungi kunda o'quvchi va abituriyentlarni qiynab kelayotgan irratsional tenglamalar va tengsizliklarni o'qitish usullari haqida bo'lib, ularga doir misollar ishlab ko'rsatilgan va mustaqil ishlash uchun misollar berilgan.

Kalit so'zlar: Irratsional, chet ildiz, tengsizliklarni oraliqlar usuli, ildiz, modul, belgilash, darajaga oshirish, aniqlanish soha.

Irratsional tenglamalar . Agar A(x)=B(x) tenglamadagi A(x) yoki B(x) ifodalardan hyech bo'lmasa biri irratsional bo'lsa, unga *irratsional tenglama* deyiladi. Ularni yechishda teng kuchli almashtirishlardan foydalanamiz.

Teorema: Agar n soni musbat va toi bo'lsa, u holda A(x)=B(x) va $A^n(x)=B^n(x)$ tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Agar n soni musbat va juft bo'lsa, $A^n(x)=B^n(x)$ tenglamaning ildizi A(x)=B(x) va A(x)=-B(x) tenglamalardan hyech bo'lmasa birini ianoatlantiradi.

Isbot: α soni A(x)=B(x) tenglamaning ildizi, ya'ni A(α)=B(α) bo'lsin. U holda $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$, ya'ni α soni $A^n(x)=B^n(x)$ tenglamaning ham ildizi. Aksincha, α soni $A^n(x)=B^n(x)$ ning ildizi, ya'ni $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$ bo'lsa, toi n larda A(α)=B(α) bo'ladi, ya'ni $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A^n(x)=B^n(x)$. Juft n larda $A^n(\alpha)=B^n(\alpha)$ tenglik yo A(α)=B(α) bo'lganda, A(α)=-B(α) da o'rinli va shunga ko'ra α soni A(x)=B(x) va A(x)=-B(x) tenglamalardan hyech bo'lmasa birining ildizi bo'ladi.

ISSN 2181-3187

Bularga iaraganda A(x)=B(x) irratsional tenglamaning ikkala iismi juft darajaga ko'tarilganda *chet ildizlar*, ya'ni A(x)=-B(x) tenglamaning ildizlari paydo bo'lishi mumkin. Juft darajaga ko'targanda chet ildizlarning paydo bo'lishi mavjudlik sohasining o'zgarishidan ham bo'lishi mumkin. Ularni aniilash uchun topilgan ildizlarni berilgan tenglamaga io'yib tekshirish, shuningdek, teng kuchlilik shartlariga rioya iilinganligini tekshirish kerak. Chunonchi, A(x), B(x) ifodalar ratsional ifoda va $\sqrt[2k]{A(x)} \geq 0$, $k \in$N, bo'lganda iuyidagi o'rinli bo'ladi:

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A(x) = B^{2k}(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

1-misol. $\sqrt{x^2+3x+1} = x-2$ tenglamani yechamiz.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} x^2+3x+1 = (x-2)^2, \\ x-2 \geq 0. \end{cases} \quad .$$

$x^2+3x+1=(x-2)^2$ tenglama yagona x=3/7 ildizga ega. Lekin u x-2 $\geq$ 0

tengsizligini ianoatlantirmaydi.Tenglama yechimga ega emas.

2-misol. $\sqrt{-3x^2+3x-2} = \sqrt{-2x-10}$ tenglamani yechamiz.

Yechish. Tenglama ushbu sistemaga teng kuchli:

$-3x^2+3x-2=-2x-10$, $-2x-10 \geq 0$.

$-3x^2+3x-2=-2x-10$ tenglamaning ildizlari -1 va $2\frac{2}{3}$. Lekin bu iiymatlarda $-2x-10 \geq 0$ tengsizligi bajarilmaydi. Demak, berilgan tenglama ildizga ega emas.

3-misol. $x^2-3x-11+\sqrt{x^2-3x-9}=0$ tenglamani yechamiz.

ISSN 2181-3187

Yechish. $u=\sqrt{x^2-3x-9}$ almashtirish tenglamani y^2-2+y=0 ko'rinishga keltiradi. Uning ildizlari y_1=-2, y_2=1 sonlari bo'lgani uchun, eski o'zgaruvchiga iaytish natijasida yechimga ega bo'lmagan $\sqrt{x^2-3x-9}=-2$ tenglamaga, hamda x_1=-2 va x_2=5 ildizlarga ega bo'lgan $\sqrt{x^2-3x-9}=1$ tenglamaga ega bo'lamiz. Demak, berilgan tenglama x_1=-2 va x_2=5 ildizlarga ega.

4-misol. $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-4x+4}=2$ tenglamani yechamiz.

Yechish. $\sqrt{x^2-8x+16}=|x-4|$ va $\sqrt{x^2-4x+4}=|x-2|$ bo'lgani uchun berilgan tenglama $|x-4|+|x-2|=2$ ko'rinishga keladi. Modul qatnashgan bu tenglama barcha $x\in[2;\ 4]$ lardagina to'Iri tenglikka aylanadi.

Mustakil ishlar.

Tenglamalarni mantiiiy mulohazalar yuritib yeching:

1. $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x-1}=-3.$ 2. $4+\sqrt{2y-3}=1.$

3. $6-\sqrt{x+\sqrt{2}}=7.$ 4. $\sqrt{10+\sqrt{x-\sqrt{3}}}=3.$

5. $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=5.$ 6. $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=1.$

7. $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=-1.$ 8. $\sqrt{x+4}+\sqrt{-x-5}=0.$

Tenglamalarni yangi o'zgaruvchi kiritib yeching:

1. $x^2-4x+6=\sqrt{2x^2-8x+12}$. 2. $2x^2+3x-5\sqrt{x^2+3x+9}+3=0$.

3. $x^2+\sqrt{x^2+2x+8}=12-2x$. 4. $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$.

5. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$. 6. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$.

7. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$. 8. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2}+\dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5}=2$.

ISSN 2181-3187

9. $\frac{8}{\sqrt{10-2x}}-\sqrt{10-2x}=2.$ 10. $\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$

11. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}}=4.$ 12. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1.$

Irratsional tengsizliklar. a va b sonlari nomanfiy bo'lgandagina $a<b$ dan $a^n<b^n$ kelib chiiadi (va aksincha $a^n<b^n \Rightarrow a<b$). Shunga ko'ra A(x), V(x) irratsional ifodali tengsizliklarni yechishda ularning ishoralari e'tiborga olinishi kerak. Umuman,

$$\sqrt[2k]{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) > 0, \\ A(x) < B^{2k}(x) \end{cases} \qquad (1)$$

bo'ladi. Sistemadagi birinchi tengsizlik ildiz ostidagi ifodaning nomanfiyligini, ikkinchisining musbatligini ifodalaydi, uchinchisi $a \geq 0$, $b \geq 0$ da $a<b$ va $a^{2k} < b^{2k}$ tengsizliklar bir vaitda bajarilishidan kelib chiiadi.

$\sqrt[2k]{A(x)} > B(x)$ tengsizligi $B(x) \geq 0$, $A(x) > B^{2k}(x)$ bo'lganda yoki

A(x) ≥ 0, B(x) < 0 bo'lganda o'rinli. Shunga ko'ra

$$\begin{cases} B(x) \geq 0, \\ A(x) > B^{2k}(x) \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0, \\ B(x) < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

tengsizliklar sistemalarini yechish va ularning yechimlarini birlashtirish kerak.

1-misol. $\sqrt{x^2+6x-16} > x-1$ tengsizligini yechamiz.

Ye ch i sh. Tengsizlikdan ushbu tengsizliklar sistemalari hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x^2+6x-16 > x^2-2x+1 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x^2+6x-16 \geq 0, \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

ISSN 2181-3187

Birinchi sistemaning yechimi $\left(2\frac{1}{8};+\infty\right)$ to'plamdan, ikkinchi sistemaniki (-∞; -8) to'plamdan iborat. Javob: (-∞ ; -8) ∪ $\left(2\frac{1}{8};\ +\infty\right)$

Agar irratsional tengsizlik $\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}<C(x)$ (4) ko'rinishda berilgan bo'lsa, $A(x)\geq 0$, $B(x)\geq 0$ va $\sqrt{B(x)}<C(x)$ (yoki $\sqrt{A(x)}<C(x)$) shartlar bajarilganda berilgan tengsizlik $A(x)<(C(x)-\sqrt{B(x)})^2$ (yoki $B(x)<\left(C(x)-\sqrt{A(x)}\right)^2$) tengsizligiga teng kuchli bo'lib, yuiorida iaralgan turlardan biriga keladi.

2-misol. $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}<5$ tengsizligini yechamiz.

Ye ch i sh. $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x+4\geq 0, \\ \sqrt{x-1}<5, \\ x+4<\left(5-\sqrt{x-1}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x\geq -4, \\ x<26, \\ x<5 \end{cases} \Rightarrow\ 1\ \leq x\ \leq\ 5.$ Yechim: $1\leq x\leq 5$.

Tengsizliklarni yeching:

1. $\sqrt{x+7}<x$.
2. $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$.
3. $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$.
4. $\sqrt{x+78}<x+6$.
5. $\sqrt{(x+2)(x-5)}<8-x$.
6. $1-\sqrt{13+3x^2}>2x$.
7. $\sqrt{x^2+x-12}<x$.
8. $\sqrt{2x+4}>x+3$.
9. $\sqrt{x^2+x-2}>x$.
10. $\sqrt{9-24x+16x^2}>8$.
11. $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x$.
12. $\sqrt{x^2-5x-24}>x+2$.
13. $\sqrt{x^2-4x}>x-4$.
14. $\sqrt{x^2-x-6}\leq x+5$.
15. $\sqrt{x^2-5x+6}\leq x+1$.
16. $\sqrt{x^2-7x+12}\geq 1-x$.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. A. Normetov "Trigonometriya". Toshkent 2005-yil.

2. A. U. Abduhamidov va boshqalar Algebra va matematik analiz asoslari II qism. Toshkent 2005-yil.

3. A. Meliqulov, P. Qurbonov, P. Ismoilov Matematika II qism KXK uchun o'quv qo'llanma 2004 yil.Algebra 9-sinf Sh. Alimov, O. Xolmuhamedov.

4. A.Abduhamidov, H.Nasimov va boshqalar "Algebra va matematik analiz asoslari"- II qism, Toshkent, "O'qituvchi" 2005 yil.