ISSN 2181-3187

FUNKSIYA HOSILASI YORDAMIDA BA‘ZI BIR OPTIMALLASHTIRISH MASALALARI

O‘ktamaliyev Ikromjon Qahramon o‘g‘li
Namangan davlat pedagogika instituti
Aniq fanlar kafedrasi o‘qituvchisi
Xo‘jamqulov Ravshanbek Hasanboy o`g`li,
Abdullayeva Shaxloxon Baxodir qizi
Namangan Davlat Pedagogika institute
Matematika-informatika yo`nalishi
2-kurs talabalari

Annotatsiya: Ushbu maqola funksiya hosilasi yordamida ba’zi bir optimallashtirish masalalarni yechishdan iborat. Optimallashtirish matematika sohasida keng qo‘llanilib, maqsad – berilgan shartlar asosida eng yaxshi natijaga erishishdir. Optimallashtirish masalalarini yechishda hosila tushunchasi asosiy o‘rinda turadi, chunki u funksiya o‘sishi yoki kamayishini tahlil qilish va ekstrimum nuqtalarini aniqlash imkonini beradi.

Kalit so`zlar: Hosila, funksiya, ekstremum, maksimum, minimum, hajm, yuza, to‘plam, statsionar nuqta.

KIRISH

Ma’lumki, ma’lum bir amaliy masalalarni effektiv hal qilish uchun jarayondagi funksiyalarning ekstremum qiymatlarini topish talab qiladi. Bunda funksiya hosilasi tushunchasi orqali optimal qiymatlarni topish metodlari ko‘pincha qo‘l keladi. Ushbu maqolada ham funksiya hosilasi yordamida ekstremumlarni topishning nazariy asoslari berilgan. Bu usullar yordamida ba’zi bir amaliy masalalarning yechish yo‘llari keltirilgan.

ADABIYOTLAR TAHLILI

Funksiya hosilasi yordamida amaliy masalalarni optimallashtirish matematik tahlilning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, ko'plab sohalarda keng qo'llaniladi.

ISSN 2181-3187

Ushbu bo'limda mavzu bilan bog'liq asosiy ilmiy manbalar, ularning natijalari va mazmuni tahlil qilinadi.

Birlamchi manbalardan biri sifatida C. G. Börschning *Calculus Optimization Techniques* asari e'tirof etiladi [1]. Ushbu manbada funksiya hosilasi va uning yordamida ekstremal qiymatlarni aniqlash metodlari chuqur tahlil qilingan. Muallif geometrik va analitik yondashuvlar orqali hosilani amaliy masalalarda qo'llash imkoniyatlarini batafsil bayon qiladi.

E. K. Sargsyan va M. J. Petrosovning tadqiqot ishlari esa iqtisodiy jarayonlarni optimallashtirishda funksiya hosilalarining qo'llanilishiga bag'ishlangan [2]. Ular funksiya hosilasi yordamida korxonalarning foyda olish strategiyasini optimallashtirish usullari haqida fikr bildirganlar. Ayniqsa, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bilan ishlash jarayoni aniq misollar bilan keltirilgan.

Matematika va texnologiyalar integratsiyasi sohasida H. James va D. S. Wongning ishlari alohida o'rin tutadi. Ularning *Mathematical Methods for Engineering Optimization* nomli asarida hosilalar yordamida texnologik jarayonlarni optimallashtirish strategiyalari bayon etilgan [3]. Mualliflar hosila yordamida yo'qotishlarni kamaytirish va ishlab chiqarish samaradorligini oshirish usullariga urg'u berishgan.

Shuningdek, M. I. Karimovning *Matematik analiz asoslari* kitobi va undagi hosilalar bo'limi amaliy masalalarni hal qilishda qimmatli qo'llanma hisoblanadi [4]. Muallif amaliy masalalarning turli turlariga (iqtisodiy, texnologik va ekologik) oid batafsil misollarni keltirib, hosilani qanday qo'llash mumkinligini tushuntirib beradi.

Funksiya hosilalarini texnik jarayonlarda qo'llashga oid ishlarda esa G. V. Ivanovning *Industrial Optimization Through Derivatives* kitobi muhim o'rin tutadi [5]. U ishlab chiqarish jarayonlarida optimal parametrlarni aniqlash uchun matematik hosilalar qo'llanilishini o'rganadi.

Yuqoridagi manbalar asosida shuni aytish mumkinki, funksiya hosilasi yordamida optimallashtirish masalalarini hal qilish matematikadan amaliy sohalarga

ISSN 2181-3187

keng tatbiq etilmoqda. Kelgusida ushbu yo'nalishda yangi yondashuvlar va algoritmlar ishlab chiqilishi kutilmoqda.

ASOSIY TUSHUNCHALAR VA XOSSALAR

Funksiyaning ekstremumlari. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar shunday $d > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_d(x_0) = (x_0 - d, x_0 + +d) \subset X$ nuqtalaarda

$$f(x) \leq f(x_0) \qquad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizllik bajrilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi, x_0 nuqta esa $f(x)$ funksiyaning maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi.

2-tarif. Agar shunday $d > 0$ son topilsaki, $\forall x \in U_d(x_0) \backslash \{x_0\} (U_d(x_0) \subset X)$ nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizliklar bajarilsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada qat’iy maksimumga (qat’iy minimumga) erishadi deyiladi.

Funksiyaning maksimum hamda minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumlari, maksimum va minimum nuqtalari esa uning ekstremum nuqtalari deyiladi.

1-teorema. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, $x_0 \in X$ nuqtada ekstremumga erishsin.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishib, shu nuqtada hosilaga ega bo‘lsin. U holda

$\exists d > 0 : \ \forall x \in U_d(x_0) \subset X$ da $f(x) \leq f(x_0)$

bo‘ladi.

$(x_0 - d, x_0 + d)$ intervalda $f(x)$ funksiyaga Ferma teoremasini qo‘llab topamiz:

$f'(x_0) = 0.$ ▶

ISSN 2181-3187

3-ta'rif. Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta uning statsionar (kritik) nuqtasi deyiladi.

Eslatma. Agar $f(x)$ funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lishi shar emas.

Masalan, $f(x) = |x|$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada minimumga erishadi, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas.

Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtalari uning statsionar va hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari bo'lishi mumkin.

2-teorema. Aytaylik, $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to'plamda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1. $\exists d > 0,\ \forall x \in U_d(x_0) \subset X$ da $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsin;
2. $f'(x_0) = 0$;
3. $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtaning o'ng va chap tomonlarida ishora saqlansin.

Agar $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Aytaylik,

$\forall x \in (x_0 - d, x_0)$ da $f'(x) > 0$,

$\forall x \in (x_0, x_0 + d)$ da $f'(x) < 0$

bo'lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - d, x_0)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ o'suvchi, ya'ni $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + d)$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya'ni $f(x) < f(x_0)$ bo'lib, $\forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$ da $f(x) < f(x_0)$ bo'ladi. Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga erishadi.

Aytaylik,

$\forall x \in (x_0 - d, x_0)$ da $f'(x) < 0$,

$\forall x \in (x_0, x_0 + d)$ da $f'(x) > 0$

ISSN 2181-3187

bo‘lsin. U holda $\forall x \in (x_0 - d, x_0)$, $f'(x) < 0 \;\Rightarrow f(x)$ kamayuvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in (x_0, x_0 + d)$, $f'(x) > 0 \;\Rightarrow f(x)$ o‘suvchi, ya’ni $f(x) > f(x_0)$ bo‘lib, $\forall x \in (x_0 - d, x_0 + d)$ da $f(x) > f(x_0)$ bo‘ladi.

Demak, bu holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada minimumga erishadi.

Agar $\forall x \in (x_0 - d, x_0)$ da $f'(x) > 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + d)$ da $f'(x) > 0$ yoki $\forall x \in (x_0 - d, x_0)$ da $f'(x) < 0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + d)$ da $f'(x) < 0$ bo‘lsa, unda $f(x)$ funksiya $(x_0 - d, x_0 + d)$ da o‘suvchi yoki kamayuvchi bo‘lib $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

3-teorema. $f(x)$ funksiya $X \subset R$ to‘plamda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1) $f(x) \in C(X)$;
2) $\exists d > 0$, $\forall x \in U_d(x_0)\backslash\{x_0\}$ da $f'(x_0)$ hosila mavjud va chekli;
3) $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtaning o‘ng va chap tomonlarida ishora saqlansin.

Agar $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar $f'(x_0)$ hosila x_0 nuqtani o‘tishda ishorasini o‘zgartirmasa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Xususan, agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi bo‘lib, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f''(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo‘lsa, shu nuqtada $f(x)$ funksiya $f''(x_0) < 0$ bo‘lganda maksimumga, $f''(x_0) > 0$ bo‘lganda minimumga ega bo‘ladi.

MISOL YECHISH NA’MUNALARI

1-misol. 100 metrlik chilvir berilgan bo‘lib, undan to‘g‘ri to‘rtburchak shakli yasalgan. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi eng katta qiymatga ega bo‘lishi uchun uning bo‘yi necha metr bo‘lishi kerak?

ISSN 2181-3187

Yechish. Dastlab, berilan to‘g‘ti to‘rtburchakning yuzini topib olaylik:

$$S(x) = x \cdot (50 - x) = 50 \cdot x - x^2$$

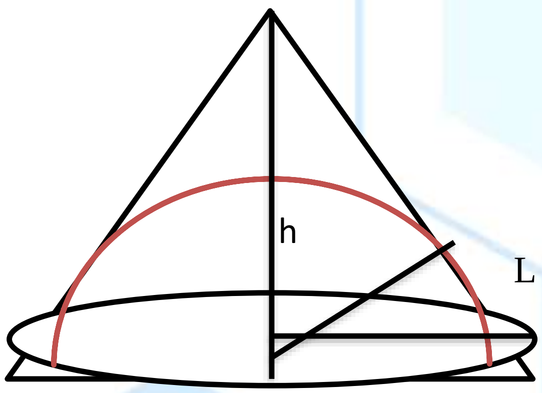
Bu funksiya $R = (-\infty; +\infty)$ aniqlangan bo‘lib, u shu to‘plamda uzluksiz. Uning hosilasini topamiz:

$$S'(x) = 50 - 2 \cdot x \qquad (1)$$

Ma’lumki, funksiya hosilasi $x = 25$ nuqtada nolga aylanadi. Hosila ifodasi (1) dan ko‘rinadiki, $x = 25$ nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda $S'(x) > 0$, o‘ng tomondagi nuqtalarda $S'(x) < 0$ bo‘ladi.

Demak, $S(x)$ funksiya $x = 25$ nuqtada maksimumga erishadi va max $S(x) = S(25) = 625$ bo‘ladi.

2-misol. Konus shaklidagi yog‘och bo‘lagi berilgan bo‘lib, bu yog‘ochdan radiusi R ga teng bo‘lgan yarimshar shaklini yo‘nib olish kerak. Yarimsharning hajmi bizga ma’lum bo‘lsa, bu yarimsharni yo‘nib olishda eng kam chiqit chiqishi uchun konusning radiusi r va balandligi h qanday bo‘lishi kerak?



Yechish. Chiqit hajmini topish konus hajmidan yarimshar hajmini ayirish kifoya:

$$-\begin{cases} V_k = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{sh} = \dfrac{2}{3}\pi R^3 \end{cases} \Rightarrow V_{ch} = \frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad (2)$$

Uchburchaklarning o‘xshashlik alomatidan foydalanib quyidagi tenglikni aniqlab olamiz:

ISSN 2181-3187

$$\begin{cases} L = \sqrt{r^2 - R^2} \\ \dfrac{L}{R} = \dfrac{r}{h} \end{cases} \Rightarrow h = \frac{rR}{\sqrt{r^2 - R^2}} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} V_{ch} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h - \dfrac{2}{3}\pi R^3 \\ h = \dfrac{rR}{\sqrt{r^2 - R^2}} \end{cases} \Rightarrow V_{ch}(r) = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{r^3 R}{\sqrt{r^2 - R^2}} - \frac{2}{3}\pi R^3$$

(3) da topilgan tenglik orqali bizdan so‘ralgan hajmni konus radiusiga bog‘lab olamiz va uning ekstremum nuqtasini topib olishimiz mumkin bo‘ladi.

$$V'_{ch}(r) = \frac{1}{3}\pi R \cdot \frac{3r^2\sqrt{r^2 - R^2} - r^3 \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - R^2}}}{r^2 - R^2}$$

$$V'_{ch}(r) = \frac{1}{3}\pi R \cdot \frac{3r^2(r^2 - R^2) - r^4}{(r^2 - R^2)\sqrt{r^2 - R^2}}$$

$$V'_{ch}(r) = \frac{1}{3}\pi R \cdot \frac{2r^4 - 3r^2 R^2}{(r^2 - R^2)\sqrt{r^2 - R^2}}$$

$$\begin{cases} V'_{ch}(r) = \dfrac{1}{3}\pi R \cdot \dfrac{2r^4 - 3r^2R^2}{(r^2 - R^2)\sqrt{r^2 - R^2}} \\ V'_{ch}(r) = 0 \end{cases} \Rightarrow r^2(2r^2 - 3R^2) = 0$$

$r > 0$ bo‘lgani uchun:

$$r = \frac{\sqrt{6}R}{2}$$

bo‘ladi, topilgan qiymatni (3) formulaga qoyib konus balandligini topishimiz mumkin:

$$h = \frac{\dfrac{\sqrt{6}R}{2} \cdot R}{\sqrt{\dfrac{3R^2}{2} - R^2}} = \sqrt{3}R.$$

Ma’lumki, funksiya hosilasi $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot R$ nuqtada nolga aylanadi. Bu nuqta (2) funksiyaning ekstremum nuqtasi deyiladi.

MUHOKAMA

Funksiya hosilasi yordamida amaliy masalalarni optimallashtirishning ilmiy va amaliy ahamiyati juda katta. Amaliy masalalarda optimal yechimlarni topish nafaqat matematik analiz sohasida, balki iqtisodiyot, muhandislik, texnologiya va ekologiya kabi sohalarda ham muhim rol o'ynaydi. Adabiyotlar sharhida qayd etilgan tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, funksiya hosilalarini qo'llash orqali ishlab chiqarish samaradorligini oshirish, foyda strategiyalarini shakllantirish va texnologik jarayonlarni takomillashtirish mumkin.

Biroq, mavjud adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, ko'p hollarda nazariy yondashuvlar ustunlik qilmoqda. Amaliyotga yanada ko'proq e'tibor qaratish, yangi algoritmlar va texnikalar ishlab chiqish zarur. Shuningdek, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bilan bog'liq masalalarni yanada chuqurroq tadqiq qilish kelgusidagi ilmiy ishlarning dolzarb yo'nalishlaridan biri bo'lishi mumkin.

XULOSA

Funksiya hosilasi yordamida amaliy masalalarni optimallashtirish matematik analizning samarali usullaridan biri hisoblanadi. Adabiyotlar tahlili shuni ko'rsatadiki, ushbu usul turli sohalarda, jumladan iqtisodiyot, texnologiya va ishlab chiqarishda muvaffaqiyatli qo'llanilmoqda. Kelajakda ushbu mavzu doirasida yangi tadqiqotlar o'tkazish, amaliy masalalarni yechishga qaratilgan yanada aniq yondashuvlar ishlab chiqish zarur. Shuningdek, hosila metodlarining algoritmik asoslarini yanada kengaytirish va texnologik integratsiyani kuchaytirish istiqbolli yo'nalishlardan biri sifatida e'tiborga olinishi lozim.

ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Börsch, C. G. *Calculus Optimization Techniques*.
2. Sargsyan, E. K., & Petrosov, M. J. *Economic Optimization with Derivatives*.
3. James, H., & Wong, D. S. *Mathematical Methods for Engineering Optimization*.
4. Karimov, M. I. *Matematik analiz asoslari*.
5. Ivanov, G. V. *Industrial Optimization Through Derivatives*.
6. Xakimov, R. M. (2019). IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE. *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*, *1*(6), 3-8.

ISSN 2181-3187

7. Umirzaqova, K. O. (2020). PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HARD-CORE MODEL. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *2*(3), 67-73.

8. Уктамалиев, И. К. (2022). О предгеометриях конечно порожденных коммутативных полугрупп. In *МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ* (pp. 166-166).

9. Уктамалиев, И. К. (2022). О числе счётных моделей аддитивной теории натуральных чисел.

10. O‘G, O. K. I. Q., O’G’Li, J. A. H., & O‘G, H. T. X. D. (2024). FUNKSIONAL QATORNI HADLAB INTEGRALLASH VA DIFFERENSIALLASHDAN FOYDALANIB BA’ZI BIR SONLI QATORLAR YIG ‘INDISINI TOPISH METODLARI. *Science and innovation*, *3*(Special Issue 57), 411-416.

11. O‘G, O. K. I. Q., Qizi, N. M. S. N., & Qizi, A. M. O. A. (2024). TEYLOR QATORI YORDAMIDA BA’ZI BIR SONLI QATORLARNING YIG ‘INDISINI TOPISH USULLARI. *Science and innovation*, *3*(Special Issue 57), 275-277.

12. Xo‘jamqulov, R. (2024). Matematika fanini o ‘rganishda Maple platformasidan foydalanish imkoniyatlari va amaliy jihatlari. *Universal xalqaro ilmiy jurnal*, *1*(12), 335-338.