ISSN 2181-3187

SHTOLTS TEOREMASIDAN FOYDALANIB BA'ZI BIR LIMITLARNI HISOBLASH METODLARI

O'ktamaliyev Ikromjon Qahramon o'g'li
Namangan davlat pedagogika
instituti Aniq fanlar kafedrasi o'qituvchisi
E-mail:i.uktamaliev@g.alumni.nsu.ru
Husanov To'xtamurod Dilshod o'g'li
Namangan davlat pedagogika instituti talabasi
Jo'raxonov Asadillo Hasanboy o'g'li
Namangan davlat pedagogika instituti talabasi

Annotatsiya: Mazkur maqolada Shtolts teoremasining limitlarni hisoblashda qo'llanilishi tahlil qilinadi. Shtolts teoremasi, odatda, aniqlanmagan shakllarga ega limitlarni topishda samarali usullardan biri bo'lib, ayniqsa, limitning maxsus holatlarida qo'l keladi. Maqolada Shtolts teoremasining asosiy shartlari, isboti va uning qo'llash usullari ko'rib chiqiladi. Shuningdek, ushbu teorema yordamida murakkab funksiyalarning limitlarini aniqlash bo'yicha amaliy misollar keltirilgan.

Kalit so'zlar: Shtolts teoremasi, medianta, sonli ketma-ketlik, limit, o'suvchi ketma-ketlik.

KIRISH

Ma'lumki, haqiqiy sonlar ketma-ketligining limitlarini hisoblashning turli xil metodlari mavjud. Biz shunday metodlardan biri bo'lmish Shtolts teoremasi haqida gaplashamiz. Shtolts teoremasi sonli ketma-ketliklarning limitlarini topishda ishlatiladi va quyidagi holatlarda qo'llaniladi. Odatda, sonli ketma-ketlik kasr ko'rinishda bo'lib, bu holatda klassik metodlar bilan ushbu limitni topish qiyinchilik tug'dirsa, bu teoremadan foydalanib limitni hisoblashimiz mumkin. Ushbu ishda teoramani isboti bilan ko'rib chiqamiz hamda bu teoremadan foydalanib limitlarni hisoblash metodlarini tahlil qilamiz.

ADABIYOTLAR SHARHI

ISSN 2181-3187

Ushbu Shtolts teoremasi birinchi nemis matematigi Otto Shtoltsning 1885 yildagi “Umumiy arifmetika haqida” deb nomlangan kitobida uchraydi [1]. Keyin esa deyarli koʻpgina “Matematik analiz” uchun yozilgan darslik va qoʻllanmalarda bu teoramaning turli xil versiyalarini uchratish mumkin. Biz ushbu maqolada bu teoremaning rus matematigi Grigoriy Mixaylovich Fixtengolts usuli boʻyicha isbotini keltiramiz [2]. Undan tashqari bu teoremaning isbotini [3] adabiyot boʻyicha ham oʻrganish mumkin.

SHTOLTS TEOREMASI BAYONI VA ISBOTI

Shtolts teoremasini isbotlashdan oldin biz “medianta” tushunchasini kiritamiz va uning xossasini keltiramiz.

Ta’rif: Musbat maxrajli $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlar uchun $\frac{a+c}{b+d}$ kasr bu kasrlarning *mediantasi* deyiladi.

Lemma: Agar musbat maxrajli $\frac{a}{b}$ va $\frac{c}{d}$ kasrlar uchun agar $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ boʻlsa, u holda

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

boʻladi.

Lemmaning isboti: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad ad < bc \quad \leftrightarrow \quad ad + ab < bc + ab \quad \leftrightarrow \quad a(b+d) < b(a+c) \quad \leftrightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Tengsizlikning chap tomoni isbotlandi. Endi oʻng tomonni isbotlaymiz:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \leftrightarrow \quad ad < bc \quad \leftrightarrow \quad ad + cd < bc + cd \leftrightarrow$

$d(a+c) < c(b+d) \quad \leftrightarrow \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Lemma isbotlandi.

Shtolts teoramasi: x_n va y_n sonli ketma-ketliklar boʻlib, y_n qat’iy oʻsuvchi ketma-ketlik va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ boʻlsin. Agar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ limit mavjud boʻlsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

boʻladi.

Isboti: Aytaylik, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$ bo'lsin. U holda shunday m natural son borki, ixtiyoriy $n>m$ natural sonlar uchun $a-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\frac{\varepsilon}{2}$. Demak, quyidagi $\frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m},\frac{x_{m+2}-x_{m+1}}{y_{m+2}-y_{m+1}},\dots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ barcha kasrlar ham $\left(a-\frac{\varepsilon}{2};a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ intervalda yotadi. $\frac{x_{m+1}-x_m}{y_{m+1}-y_m},\frac{x_{m+2}-x_{m+1}}{y_{m+2}-y_{m+1}},\dots,\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ kasrlarning maxraji musbat, chunki teorema shartiga ko'ra y_n qat'iy o'suvchi. Demak, bu kasrlarga ketma-ket chapdan o'nga ketma-ket medianta xossasini qo'llash orqali $\frac{x_n-x_m}{y_n-y_m}$ kasr ham $\left(a-\frac{\varepsilon}{2};a+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ intervalda yotishi kelib chiqadi, ya'ni $\left|\frac{x_n-x_m}{y_n-y_m}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Endi quyidagi ayniyatdan foydalanamiz:

$$\frac{x_n}{y_n}-a=\frac{x_m-ay_m}{y_n}+\left(1-\frac{y_m}{y_n}\right)\left(\frac{x_n-x_m}{y_n-y_m}-a\right).$$

Bundan quyidagicha tengsizlikka kelamiz:

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|\le\left|\frac{x_m-ay_m}{y_n}\right|+\left|\frac{x_n-x_m}{y_n-y_m}-a\right|.$$

Oxirgi tengsizlikda $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$ bo'lgani uchun, shunday M natural soni mavjudki, $n>M$ lar uchun $\left|\frac{x_m-ay_m}{y_n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ deb olishimiz mumkin. Undan tashqari $\left|\frac{x_n-x_m}{y_n-y_m}-a\right|<\frac{\varepsilon}{2}$ ekanligidan $\left|\frac{x_n}{y_n}-a\right|<\varepsilon$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a$. Isbot tamom.

Shtolts teoremasining qo'llanilishi:

Shtolts teoramasi ko'plab matematik limitlarni hisoblashda yordam beradi, ayniqsa quyidagi vaziyatlarda:

- Ketma ketliklar o'rtasida nisbiy limitlarni hisoblashda;
- Fibonachchi sonlari yoki boshqa rekrusiv ketma ketliklar asosida limitlarni aniqlashda;
- Murakkab ko'rinishdagi qator va integral limitlarni soddalashtirishda.

MISOL YECHISH NA'MUNALARI

ISSN 2181-3187

1-misol. Umumiy hadi $u_n = \frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{n^3}$ bo‘lgan ketma ketlikning limitini hisoblang.

Yechimi: Shtolts teoremasiga ko‘ra $x_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2$ va $y_n = n^3$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 - (1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{(n+1)^3 - n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 + 4n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{4}{3}.$$

2-misol. Ushbu limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$.

Yechimi: $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$, $y_n = n^{p+1}$ bo‘lgani uchun Shtolts teoremasini qo‘llaymiz: Shtolts teoremasiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1^p + 2^p + \cdots + n^p + (n+1)^p) - (1^p + 2^p + \cdots n^p)}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{n^{p+1} + (p+1)n^p + \frac{p(p+1)}{2} n^{p-1} + \cdots + 1^{p+1} - n^{p+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p + \frac{p(p+1)}{2} n^{p-1} + \cdots + 1^{p+1}}.$$

Surat va maxrajni n^p ifodaga bo‘lib yuboramiz. Bizda esa ushbu ifoda kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^p}{(p+1) + \frac{p(p+1)}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^p}}.$$

Oxirgi limit esa $\frac{1}{p+1}$ ekanligini ko‘rish mumkin. Javob: $\frac{1}{p+1}$.

3-misol. Limitni hisoblang: $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1})$

ISSN 2181-3187

Yechimi: Ushbu limitni hisoblashdan oldin bu ikkala kasrga umumiy mahraj berib ayirib soddalashtirib olamiz ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}}{n^p(p+1)}$ holatga keltirib olamiz. Oxirgi ifodaning surat va maxrajiga e'tibor bersak, Shtolts teoremasini qanoatlantiradi. Endi Shtolts teoremasiga ko'ra, biz quyidagi limitni hisoblasak, dastlabki limitning javobini topgan bo'lamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left((p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p+(n+1)^p)-(n+1)^{p+1}\right)-(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)+n^{p+1}}{(n+1)^p(p+1)-n^p(p+1)}.$$

Qavslarni ochib hisoblasak bizda ushbu ifoda kelib chiqadi:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p-n^p)}.$$

Biz Nyuton binomi bo'yicha yana sur'at hamda maxrajdagi qavslarni ochib yuboramiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)n^p+p(p+1)n^{p-1}+\cdots+(p+1)-n^{p+1}-(p+1)n^p-\frac{p(p+1)}{2}n^{p-1}-\cdots-1+n^{p+1}}{(p+1)(n^p+pn^{p-1}+\cdots+1-n^p)}.$$

Ifodani soddalashtirgandan keyin esa surat va maxrajni n^{p-1} ifodaga bo'lib yuboramiz va quyidagicha ifodaga ega bo'lamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(p+1)+\cdots+\frac{(p+1)}{n^{p-1}}-\frac{p(p+1)}{2}-\cdots-\frac{1}{n^{p-1}}}{(p+1)(p+\frac{p(p+1)}{n}+\cdots+\frac{1}{n^{p-1}})}.$$

Bu oxirgi limit esa $\frac{1}{2}$ ekanligini ko'rishimiz mumkin.

Javob: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right)=\frac{1}{2}$.

MUHOKAMA

Ko'rish mumkinki, Shtolts teoremasi $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ ko'rinishdagi limitlarni hisoblashdagi qiyinchiliklarni $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$ ko'rinishdagi soddaroq limitlarni hisoblashga almashtirishga asoslanadi. Ammo doim ham bu ko'rinishdagi limitlarni hisoblash qulaylik tug'dirmasligi mumkin. Chunki, ba'zi holatlarda yuqoridagi ikkinchi limit birinchisidan murakkabroq bo'lishi ham mumkin. Undan tashqari, ba'zi bir xolatlarda murakkabroq ikkinchi ko'rinishdagi limitlarni hisoblashda Shtolts

ISSN 2181-3187

teormasidan foydalanib, birinchi koʻrinishga keltirib olish ham mumkin. Shuning uchun Shtolts teoremasidan foydalanishda limitni teorma shartlarini bajarishga tekshirish va qulaylik yaratadigan holatlarni inobatga olish muhim.

XULOSA

Ushbu maqolada Shtolts teoramisining isboti va Shtolts teoremasidan foydalangan holda limitlarni hisoblash metodlari tahlil qilindi. Shtolts teoremasi matematik analizda qator va limitlarni osonroq aniqlashda kuchli vosita hisoblanadi. U cheksiz ketma- ketliklarning limitini hisoblashda katta yordam beradi, ayniqsa qatorlar va funksiyalarning oʻsishi tezligini solishtirish orqali yechimlarni soddalashtiradi. Maqolada ushbu teorema yordamida turli misollarni koʻrib chiqish orqali limitlarni hisoblash texnikalari koʻrsatib oʻtildi.

Matematik analiz kurslarida Shtolts teoremasini kengroq qoʻllash va uni talabalar orasida tushunarliroq qilib oʻrgatish tavsiya etiladi. Shuningdek, ushbu teoremani qoʻllanilishi boʻyicha koʻproq misollar va amaliy topshiriqlar berish, uni real hayotdagi matematik modellashtirish va hisoblash masalalarida ham qoʻllash usullarini koʻrsatish foydali boʻlishi mumkin. Bu orqali talabalar matematik analiz va limitlarni hisoblash jarayonlarini chuqurroq tushunish imkoniyatiga ega boʻladilar.

ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. O. Stoltz. Vorlesungen uber allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten. – Leipzig: Teubners, 1885. – S. 173-175.
2. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: Физматлит, 2003. — Т. 1. — С. 78—79.
3. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу / Под ред. В. А. Садовничего. — М.: Высшая школа, 1999. — С. 43—44. — ISBN 5-06-003596-4.
4. Xakimov, R. M. (2019). IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE. *Scientific and Technical Journal of Namangan Institute of Engineering and Technology*, *1*(6), 3-8.

5. Umirzaqova, K. O. (2020). PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HARD-CORE MODEL. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *2*(3), 67-73.
6. Уктамалиев, И. К. (2022). О предгеометриях конечно порожденных коммутативных полугрупп. In *МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ* (pp. 166-166).
7. Уктамалиев, И. К. (2022). О числе счётных моделей аддитивной теории натуральных чисел.
8. O‘G, O. K. I. Q., O’G’Li, J. A. H., & O‘G, H. T. X. D. (2024). FUNKSIONAL QATORNI HADLAB INTEGRALLASH VA DIFFERENSIALLASHDAN FOYDALANIB BA’ZI BIR SONLI QATORLAR YIG ‘INDISINI TOPISH METODLARI. *Science and innovation*, *3*(Special Issue 57), 411-416.
9. O‘G, O. K. I. Q., Qizi, N. M. S. N., & Qizi, A. M. O. A. (2024). TEYLOR QATORI YORDAMIDA BA’ZI BIR SONLI QATORLARNING YIG ‘INDISINI TOPISH USULLARI. *Science and innovation*, *3*(Special Issue 57), 275-277.
10. Xo‘jamqulov, R. (2024). Matematika fanini o ‘rganishda Maple platformasidan foydalanish imkoniyatlari va amaliy jihatlari. *Universal xalqaro ilmiy jurnal*, *1*(12), 335-338.