ISSN 2181-3187

IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALA

Fazliddinova Nigora Avaz qizi

Farg'ona davlat universuteti

Amaliy matematika yo'nalishi

1- bosqich magistranti

Mamajonova Dilnoza Dilshodjon qizi

Farg'ona davlat universuteti

Amaliy matematika yo'nalishi

1- bosqich magistranti

ANNOTATSIYA. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar ko'rib chiqiladi. Masalaning qo'yilishi, uning yaxshi sharoitli bo'lishi uchun zarur va yetarli shartlar, shuningdek, yechimlarni topish usullari tahlil qilinadi. Ayirma sxemalar yordamida sonli yechimlar olinishi va ularning barqarorligi muhokama qilinadi. Shuningdek, chegaraviy masalaning yaxshi sharoitli bo'lishini ta'minlovchi omillar tahlil qilinadi va asosiy matematik formulalar keltiriladi. Maqolada nazariy natijalar misollar orqali tasdiqlanadi.

Kalit so'zlar: ikkinchi tartibli tenglamalar, chegaraviy masala, ayirma sxemalar, yaxshi sharoitli masala, barqarorlik, yechimlar.

KIRISH. Matematik fizika tenglamalarining yechimlarini topish masalasi ilmiy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega. Bunday tenglamalar ko'plab tabiiy va texnik jarayonlarni tavsiflashda qo'llaniladi. Xususan, ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bilan ifodalanadigan chegaraviy masalalar issiqlik o'tkazuvchanligi, elastiklik nazariyasi va suyuqlik dinamikasi kabi sohalarda keng qo‘llaniladi.

Bunday masalalarni tahlil qilishda ularning yaxshi sharoitli (yaxshi qo‘llanish mumkin bo‘lgan) ekanligini aniqlash muhimdir. Yaxshi sharoitlilik masalaning yagona va barqaror yechimga ega bo‘lishini ta’minlaydi, bu esa nazariy va sonli yechimlarni olishda katta rol o‘ynaydi.

Ushbu maqolada ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yaxshi sharoitli bo‘lishi uchun zarur va yetarli shartlar o‘rganiladi. Shuningdek, masalalarning yechimlarini topish usullari, ayniqsa ayirma sxemalar orqali yechim olish metodlari tahlil qilinadi. Maqolada nazariy natijalar misollar bilan mustahkamlanadi.

Ushbu bobda qaralayotgan ko'rinishdagi chegaraviy masalalar oddiy differensial tenglamalar va xususiy hosilali tenglamalarni sonli yechish uchun ayirma sxemalarini qo'llashda yuzaga keladi.

Masalaning qo‘yilishi. Yaxshi sharoitli bo‘lish belgilari.

1. Masalaning qo‘yilishi. Eng sodda chegaraviy masala to‘r funksiyasi $\{u_n\}$, $n = 0,1,2,...,\mathrm{N}$, ni quyidagi ayirma tenglamani qanoatlantiradigan holda topishdan iborat:

$$\mathrm{a}_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = f_n, \quad n = 0,1,2,...,\mathrm{N}-1, \qquad (1)$$

ichki nuqtalarda $0 < n < N$, to’r segmentining soni $0 \le n \le N$, va berilgan qiymatlarni qabul qiladi

$$u_0 = \varphi, \quad u_N = \psi \qquad (2)$$

Chegaraviy masala ayirma tenglamalar tizimlari uchun 7-bandda ifodalanadi.

Tenglama

ISSN 2181-3187

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = f_n, \qquad a_n \neq 0 \qquad c_n \neq 0$$

Shuningdek, qiziqarli savol yuzaga keladi: agar chegaraviy shart (2) dagidek to‘rning chegaraviy nuqtalaridagi qiymatlarni emas, balki oraliqdagi ikkita boshqa nuqtadagi qiymatlarni bersak, yechimini bir qiymatli aniqlash mumkinmi?

Keling, quyidagi chegaraviy masalani ko‘rib chiqamiz:

$$u_{n-1} - u_n + u_{n+1} = 0, \qquad n = 1, 2, ..., 299, \qquad (3)$$

$$u_0 = 0, \mathrm{u}_{300} = 1 \qquad (4)$$

(3)-tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$u_n = \gamma_1 \cos\frac{n\pi}{3} + \gamma_2 \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Shartdan $u_0 = 0,$ quyidagicha kelib chiqadi: $\gamma_1 = 0..$

Shartni $\mathrm{u}_{300} = 1$ bajarish uchun γ_2 ni quyidagi tenglamadan tanlash kerak:

$$u_{300} = \gamma_2 \sin\frac{300\pi}{3} = 1.$$

Lekin bu tenglama echimsiz, chunki har qanday γ_2 uchun uning chap qismi nolga teng, lekin birga emas.

Agar $\mathrm{u}_{300} = 1$ sharti o‘rniga $\mathrm{u}_{300} = 0$ (sharti $u_0 = 0,$ o‘z o‘rnida qolganda) tanlansa, unda γ_2 yana nolga teng bo‘lishi kerak, va bu holda γ_2 har qanday qiymatga ega bo‘lishi mumkin:

$$\gamma_2 \sin\frac{300\pi}{3} = \gamma_2 \cdot 0 = 0$$

Ko‘rib turibmizki, (1), (2) chegaraviy masala, umuman olganda, yechimga ega

ISSN 2181-3187

bo‘lmasligi yoki uning yechimi yagona bo‘lmasligi mumkin. Ammo chegaraviy masalalar bilan ko‘pincha duch kelinadi.

Ma’lum bo‘lishicha, yetarlicha keng sinflar mavjud bo‘lib, ular uchun (1), (2) chegaraviy masala nafaqat har doim bir qiymatli hal etiladi, balki berilgan o‘ng qismlar φ, ψ va f_n dagi xatolarni yaxlitlashga "kam" sezgirlikka ega, ya’ni "yaxshi shartlangan" bo‘ladi.

2. Yaxshi shartlanganlikni aniqlash. Differensial chegaraviy masalalarni taxminiy yechish uchun farqli sxemalarni o‘rganishda, odatda, bitta masalani emas, balki bu masala uchun to‘rning yanada kichikroq qadamlarida paydo bo‘ladigan bir butun oilasini ko‘rib chiqadilar. Shunda *N* sonini ushbu oilaga bog‘liq parametr deb hisoblash mumkin. To‘rni kichraytirish *N* ning o‘sishiga mos keladi.

Ko‘raylik, agar chegaraviy farqli masala (1), (2) koeffitsientlari a_n , b_n, c_n quyidagi shartni bajaruvchi birgalikda cheklangan holda, , $|a_n|,|b_n|,|c_n|<K$ ya’ni *yaxshi shartlangan* deb ataladi, agar yetarlicha katta *N* uchun uning yagona yechimi mavjud bo‘lsa va bu yechim $\{u_n\}$ o‘zi bilan tasodifiy o‘ng tomon qismlari φ, ψ va f_n va qiymatlariga mos keladigan $u_0,u_1,...,u_N$ sonlari uchun quyidagi baholashni qanoatlantirsa:

$$|u_n| \le M \max\left\{|\varphi|,|\psi|,\max_m|f_m|\right\}, \qquad (6)$$

M bu yerda — *N* ga bog‘liq bo‘lmagan biror bir son.

Ba’zan yaxshi shartlangan bo‘lgan masalalarga, *M* ni doimiy qabul qilib bo‘lmaydigan, lekin o‘sish darajasidan tez bo‘lmagan holda tanlash mumkin bo‘lgan masalalar ham *N* ga tegishli bo‘ladi. Masalan, $M=CN$ yoki $M=CN^2$.

Keltirilgan yaxshi shartlanganlik ta’rifi chiziqli tenglamalar sistemalari nazariyasida qabul qilingan ta’rifga ekvivalent bo‘lib, bunda $Ax=g$ sistemasi uchun shartlanganlik o‘lchovi sifatida matritsa *A* ning normasi va uning teskari matritsasi A^{-1} normasi

ISSN 2181-3187

ko‘paytmasi $\|A\|*\|A^{-1}\|$ olinadi.

Tengsizlik (5) bajarilishi, N sonining o‘sishi bilan yechim $u_n$ning o‘ng tomon qismlaridagi φ, ψ va f_n qiymatlarni berishda yuzaga keladigan xatoliklarga (masalan, o‘lchash xatolari yoki yaxlitlash xatolari) sezgirligi oshmasligini anglatadi. Haqiqatan ham, agar $\varphi+\Delta\varphi, \psi+\Delta\psi$, $f_n+\Delta f_n$ mos ravishda berilgan bo‘lsa, unda yechim u_n o‘zgarishni qabul qiladi. Ushbu o‘zgarish masala (1), (2) ning chiziqliligi tufayli quyidagi masalaning yechimi hisoblanadi:

$$\left.\begin{aligned} &a_n\Delta u_{n-1}+n_n\Delta u_n+c_n\Delta u_{n+1}=\Delta f_n, 0<n<N \\ &\Delta u_0=\Delta\varphi, \Delta u_N=\Delta\psi \end{aligned}\right\}$$

(5) tufayli quyidagi bahoni qanoatlantiradi:

$$|\Delta u_n| \le M \max\left\{|\Delta\varphi|, |\Delta\psi|, \max_m |\Delta f_m|\right\}.$$

Har qanday bir qiymatli yechimga ega bo‘lgan chegaraviy masala (1), (2) yaxshi shartlangan bo‘lavermaydi. Masalan, agar masalaning o‘ng tomon qismlari quyidagicha bo‘lsa:

$$\left.\begin{aligned} &u_{n+1}-5u_n+6u_{n-1}=f_n \\ &u_0=\varphi, u_N=\psi \end{aligned}\right\}$$

va ularga quyidagi o‘zgarishlar kiritilsa:

$$\Delta f_n \equiv 0, \Delta\psi=0, \Delta\varphi=\varepsilon,$$

unda yechimi quyidagi o‘zgarishni oladi:

$$\Delta u_n = 2^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{N-n}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{N}}\Delta\varphi, \qquad n=0,1,\ldots,N$$

ISSN 2181-3187

Shundan kelib chiqadi:

$$\Delta u_{N-1} \geq 2^{N-1} \cdot \frac{1}{3} \varepsilon.$$

φ qiymatining kichik o‘zgarishi ε soni bilan N o‘sishi bilan tez ortib boruvchi yechimning buzilishini keltirib chiqaradi. Tengsizlik (5) dagi M sonini eksponenta o‘sishidan sekinroq bo‘lgan miqdorga teng qilib olish mumkin emas: $2^{N-1} \cdot \frac{1}{3}$

3. Yaxshi shartlanganlikning yetarli belgisi

Teorema. Agar koeffitsiyentlar a_n, b_n, c_n quyidagi shartni qanoatlantirsa:

$$|b_n| \geq |a_n| + |c_n| + \delta, \delta > 0$$

Shunda masala (1), (2) yaxshi shartlangan bo‘lib, yechim $\{u_n\}$ quyidagi baholashni qanoatlantiradi:

$$|u_n| \leq \max\left\{|\varphi|, |\psi|, \frac{1}{\delta} \max_m |f_m|\right\}. \qquad (7)$$

Isbot. Avval, berilgan qat’iy φ, ψ va f_n qiymatlari uchun masala (1), (2) yechim $\{u_n\}$ ga ega ekanligini faraz qilamiz va uning uchun baholashni (7) ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik, $|u_n|$, $n = 0,1,\ldots,\mathrm{N}$ orasidagi eng katta qiymat $|u_k|$ bo‘lsin. Agar $k = 0$ yoki $k = N$, u holda tengsizlik (7) aniq, chunki $u_0 = \varphi, u_N = \psi$. Qolgan holatda $0 < k < N$, $|u_k| \geq |u_n|$ bo‘lsin. Bu holda, (6) ni hisobga olgan holda, quyidagilarni yozish mumkin:

$$|b_k| \cdot |u_k| = |-a_k u_{k-1} - c_k u_{k+1} + f_k| \leq |a_k| \cdot |u_{k+1}| + |f_k| \leq \left(|a_k| + |c_k|\right)|u_k| + |f_k|,$$

va shundan:

ISSN 2181-3187

$$|u_n| \leq |u_k| \leq \frac{|f_k|}{|b_k| - |a_k| - |c_k|} \leq \frac{|f_k|}{\delta},$$

tengsizlik (6) ham bajariladi.

Endi isbotlash qoldi: (1), (2) masalasi berilgan o‘ng tomonlar φ, ψ va f_n uchun yechimga ega va bu yechim yagona.

Masalani (1), (2) *(N+1)* ta noma’lum $(u_0, u_1, ..., u_N)$ ga nisbatan chiziqli tenglamalar tizimi sifatida ko‘rib chiqish mumkin. Shuning uchun ushbu tizim determinantining nolga teng emasligini ko‘rsatish kerak. Algebradan ma’lumki, tizim determinanti faqat shu shartda nolga teng emas, agar unga mos keluvchi gomogen tizim faqat nol (trivial) yechimga ega bo‘lsa. Ammo (1), (2) gomogen tizim $\varphi = \psi = f_m \equiv 0$ bo‘lgan holda quyidagicha bo‘ladi. (7) baholashidan (har qanday yechim uchun $\{u_n\}$, bu holda faqat trivial yechim $u_n \equiv 0$ mavjudligi ko‘rinadi.

(1), (2) masalaning yaxshi sharoitlanganligi uchun yetarli shart quyidagicha:

$$\frac{|b_n| - |a_n| - |c_n|}{|b_n| + |a_n| + |c_n|} \geq \theta > 0, \qquad \max\{|a_n|, |b_n|, |c_n|\} \geq B > 0. \qquad (8)$$

bu yerda θ va B, N va n ga bog‘liq bo‘lmagan ayrim doimiylar. Haqiqatan ham, (8) dan (6) quyidagi doimiy bilan kelib chiqadi:

$$\delta = \theta(|b_n| + |a_n| + |c_n|) \geq \theta B > 0.$$

Shunday qilib, (7) quyidagi shaklga keladi:

ISSN 2181-3187

$$|u_n| = \max\left\{|\varphi|, |\psi|, \frac{1}{\theta B}\max_m |f_m|\right\}. \qquad (9)$$

4. Doimiy koeffitsientli chegaraviy masalaning yaxshi sharoitlanganlik mezoni.

Teorema. Quyidagi chegaraviy masalaning yaxshi sharoitlanganligi uchun

$$\left.\begin{array}{l} au_{n-1} + bu_n + cu_{n+1} = f_n, 0 < n < N, \\ u_0 = \varphi, u_n = \psi \end{array}\right\} \qquad (10)$$

doimiy koeffitsientlar uchun shart va yetarli bo‘ladigan holat - bu xarakteristik tenglamaning q_1 va q_2 ildizlari

$$a + bq + cq^2 = 0 \qquad (11)$$

moduli bo‘yicha bittasi birdan katta, ikkinchisi birdan kichik bo‘lishi zarur. Ya’ni quyidagi tengsizliklar bajarilishi kerak:

$$|q_1| \le 1 - \frac{\theta}{2} \qquad |q_2^{-1}| \le 1 - \frac{\theta}{2} \qquad (12)$$

bu yerda θ - ayrim ijobiy doimiy.

Agar koeffitsientlar a, b, c haqiqiy bo‘lsa, unda (12) yaxshi sharoitlanganlik mezonini quyidagi qulay shaklda ifodalash mumkin:

$$\frac{|b| - |a + c|}{|b| + |a| + |c|} \ge \theta > 0 \qquad (13)$$

ISSN 2181-3187

Mezonning (13) qulayligi shundaki, u ildizlar q_1 va q_2 ni hisoblashsiz, bevosita tekshirilishi mumkin.

(12) mezonining isboti ushbu paragraflarning 6-bandida keltirilgan.

5. O‘zgaruvchi koeffitsientlarga ega masalaning yaxshi sharoitlanganlik mezoni.

(12) mezoni doimiy koeffitsientli ayirma tenglamasi uchun oldingi bandda keltirilgan masalaning yaxshi sharoitlanganligini o‘zgaruvchi koeffitsientlar uchun umumlashtiradi, agar bu koeffitsientlar yetarlicha "silliq" o‘zgarsa.

$$a_n u_{n-1} + b_n u_n + c_n u_{n+1} = f_n \qquad 0 < n < N \qquad (1)$$

$$u_0 = \varphi, u_n = \psi \qquad (2)$$

Bu umumlashmani aniqroq ifodalaymiz. (1)-tenglamaga nisbatan, uning koeffitsientlari quyidagi shartlarni bajarishini taxmin qilamiz:

$$|a_n| < M \qquad |b_n| < M \qquad |c_n| < M$$

$$d_n = \max\{|a_n|, |b_n|, |c_n|\} \geq B > 0.$$

Bu yerda *M* va *B, N* va *n* ga bog‘liq emas deb taxmin qilinadi.

Teorema. Aytaylik, (1), (2) masalaning koeffitsientlari quyidagi shartlarni bajaradi:

$$\left.\begin{aligned} &|a_k - a_l| \leq D\left|\frac{k-l}{N}\right|^{\omega}, |b_k - b_l| \leq D\left|\frac{k-l}{N}\right|^{\omega}, \\ &|c_k - c_l| \leq D\left|\frac{k-l}{N}\right|^{\omega}, D > 0, \omega > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

ISSN 2181-3187

U holda, (1), (2) masalaning yaxshi sharoitlanganligi uchun zarur va yetarli shart shundan iboratki, (15)-kvadratik tenglama ildizlari q_1 va q_2 quyidagi shartni bajarsin:

$$a_n + b_n q + c_n q^2 = 0 \qquad 0 < n < N$$

$$|q_1| < 1 - \frac{\theta}{2} \qquad |q_2^{-1}| < 1 - \frac{\theta}{2}$$

Shartlar (14) koeffitsientlarning silliqlik talabini ifodalaydi. Ular quyidagi holda bajariladi, masalan, agar:

$$a_n = a(n/N), \mathrm{b}_n = b(n/N), \mathrm{c}_n = c(n/N),$$

bu yerda $a(\mathrm{x}), \mathrm{b}(\mathrm{x}), \mathrm{c}(\mathrm{x})$ — $0 \le \mathrm{x} \le 1$ kesmada aniqlangan va Gölder shartini qanoatlantiruvchi ba'zi funksiyalar:

$$|a(x) - a(x')| \le D|x - x'|^{\omega},$$
$$|b(x) - b(x')| \le D|x - x'|^{\omega},$$
$$|c(x) - c(x')| \le D|x - x'|^{\omega}.$$

Tenglama (15) farqli tenglama uchun tuzilgan xarakteristik tenglama hisoblanadi:

$$au_{s-1} + bu_s + cu_{s+1} = 0$$

bu yerda a,b,c — doimiy koeffitsientlar bo‘lib, o‘zgaruvchan a_n, b_n, c_n koeffitsientlarining belgilangan qiymatidagi qiymatlariga mos keladi, ya'ni:

$$a = a_n, \mathrm{b} = b_n, \mathrm{c} = c_n$$

ISSN 2181-3187

Agar a_n, b_n, c_n — haqiqiy koeffitsientlar bo‘lsa, 3-bo‘limning 3-paragrafidagi (16) shartni quyidagi oson tekshiriladigan shart bilan almashtirish mumkin:

$$\frac{|b_n|-|a_n+c_n|}{|b_n|+|a_n|+|c_n|}\ge\theta>0, \qquad (17)$$

bu yerda θ - N va n ga bog‘liq emas.

Agar $|a_n+c_n|=|a_n|+|c_n|$, bo'lsa, unda (17)-shart (8)-shart bilan mos keladi va silliqlik hamda koeffitsientlarning haqiqiyligi haqidagi taxminlarsiz yaxshi shartlilikni ta'minlaydi.

6. Doimiy koeffitsientli chegaraviy masalaning yaxshi shartlilik kriteriyasini asoslash. 4-bo‘limda keltirilgan chegaraviy masalaning yaxshi shartlilik kriteriyasini isbotlaymiz. Chegaraviy masala quyidagicha ifodalanadi:

$$\left.\begin{array}{l} au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n, 0<n<N, \\ u_0=\varphi, u_n=\psi \end{array}\right\} \qquad (10)$$

va quyidagi tasdiqni ko‘rsatadi. (10)-masalaning yaxshi shartli bo‘lishi uchun zarur va yetarli shart bu shuki, xarakteristik tenglamaning

$$a+bq+cq^2=0 \qquad (11)$$

ildizlari quyidagi turdagi tengsizliklarni qanoatlantirishi kerak:

$$|q_1|\le 1-\frac{\theta}{2} \qquad |q_2^{-1}|\le 1-\frac{\theta}{2} \qquad (12)$$

ISSN 2181-3187

bu yerda θ — ayrim ijobiy doimiy qiymat.

Yetarlilik. (10)-masalaning yechimini ikkita to‘r funksiyasining yig‘indisi shaklida tasavvur qilamiz:

$$u_n = \bar{u}_n + \tilde{u}_n, \qquad (18)$$

bu yerda $\{\bar{u}_n\}$ quyidagi masalaning yechimi:

$$\left.\begin{array}{l} a\bar{u}_{n-1} + b\bar{u}_n + c\bar{u}_{n+1} = 0, 0 < n < N, \\ \bar{u}_0 = \varphi, \bar{u}_N = \psi, \end{array}\right\} \qquad (19)$$

va $\{\tilde{u}_n\}$ quyidagi masalaning yechimi:

$$\left.\begin{array}{l} a\tilde{u}_{n-1} + b\tilde{u}_n + c\tilde{u}_{n+1} = f_n, 0 < n < N, \\ \bar{u}_0 = 0, \bar{u}_N = 0, \end{array}\right\} \qquad (20)$$

(19)-masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{u}_n = Aq_1^n + Bq_2^n,$$

bu yerda A va B quyidagi shartlardan aniqlanadi: $\bar{u}_0 = \varphi, \bar{u}_N = \psi$:

$$\bar{u}_n = \frac{\varphi - \psi q_2^{-N}}{1 - \left(q_1 q_2^{-}\right)^N} q_1^n + \frac{\psi - \varphi q_1^N}{1 - \left(q_1 q_2^{-}\right)^N} q_2^{n-N}. \qquad (21)$$

Endi $1 - \theta / 2 = \rho$, deb belgilab, (21)-dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left|\overline{u}_n\right| \le 2\frac{\max\left(\rho^n \rho^{N-n}\right)}{1-\rho^{2N}}\max\left(\left|\varphi\right|,\left|\psi\right|\right). \qquad (22)$$

Shunday qilib, barcha $N \ge 2$ va $n = 0,1,\dots,N$ uchun:

$$\left|\overline{u}_n\right| \le \frac{2}{1-\rho}\max\left(\left|\varphi\right|,\left|\psi\right|\right) = \frac{4}{\theta}\max\left(\left|\varphi\right|,\left|\psi\right|\right). \qquad (23)$$

Agar N va $N-n$ yetarlicha katta sonlar bo‘lsa, (22)-tengsizlikdagi koeffitsient istalgan darajada kichik bo‘ladi. Masalan, $n > 6/\theta, N-n > 6/\theta$ uchun

$$\rho^{6/\theta} = \left[\left(1-\frac{\theta}{2}\right)^{2/\theta}\right]^3 < \left(\frac{4}{9}\right)^3.$$

Bu yerda quyidagi mashhur tengsizlikdan foydalanilgan:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^a\left(1+\frac{1}{b}\right)^b \le \left[\frac{a\left(1-a^{-1}\right)+b\left(1+b^{-1}\right)}{a+b}\right]^{a+b} = 1$$

$a = \dfrac{2}{\theta}, b = 2$ da. Shunday qilib,

$$\frac{\max\left(\rho^n \rho^{N-n}\right)}{1-\rho^{2N}} \le \left(\frac{4}{9}\right)^3 \frac{1}{1-\left(\frac{4}{9}\right)^6} < \frac{1}{10},$$

Shuning uchun (22)dan $n > 6/\theta, N-n > 6/\theta$

ISSN 2181-3187

$$|\bar{u}_n| < \frac{1}{5}\max\left(|\varphi|,|\psi|\right). \qquad (24)$$

(20) masala bo‘yicha $\{\tilde{u}_n\}$ yechimini baholaymiz. $\tilde{u}_n$-ni ikki masalaning yechimlari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalaymiz:

$$\tilde{u}_n = u_n^* + u_n' \qquad 0 \le n \le N$$

2ta masalaning yechimi – masala:

$$au_{n-1}^* + bu_n^* + cu_{n+1}^* = \begin{cases} f_{n,} 0 < n < N, \\ 0, n \le 0\, yokin \ge N, \end{cases} \qquad (25)$$

2.Masala:

$$\left.\begin{array}{l} au_{n-1}' + bu_n' + cu_{n+1}' = 0, 0 < n < N, \\ u_0' = -u_0^*, u_N' = -u_N^*. \end{array}\right\} \qquad (26)$$

(25) masala $\{u_n^*\}$ bo‘yicha cheklangan yechim mavjud, yagona va (15) baholashga mos keladi:

$$|u_n^*| \le \frac{16}{B\theta}\max_m |f_m| \qquad (27)$$

$$B = \max\left(|a|,|b|,|c|\right)$$

Xususan,

$$\left.\begin{array}{l} |u_0^*| \le \dfrac{16}{B\theta}\max\limits_m |f_m| \\ |u_N^*| \le \dfrac{16}{B\theta}\max\limits_m |f_m| \end{array}\right\} \qquad (27')$$

ISSN 2181-3187

(26) masala bo‘yicha $\{u_n'\}$ yechimini baholash uchun, bu masala (19) masalaga o‘xshash bo‘lganligi sababli, (21) -formula va (23) -baholashdan foydalanamiz, faqat φ va ψ ni $-u_0^*$ va $-u_N^*$ ga almashtiramiz:

$$|u_n'| \le \frac{4}{\theta}\max\left(|u_0^*|,|u_N^*|\right)$$

Endi $(27')$-ni ham inobatga olamiz:

$$|u_n'| \le \frac{64}{B\theta^3}\max_m |f_m| \qquad (28)$$

(27) va (28) baholarini $\theta < 2$ shartini hisobga olib birlashtirsak, quyidagini olamiz:

$$|\tilde{u}_n| \le \frac{128}{B\theta^3}\max_m |f_m| \qquad (29)$$

Shunday qilib, dastlabki masala $\{u_n\}$ yechimi uchun (23) va (29)-baholarni birlashtirib, quyidagini olamiz:

$$|u_n| \le |\bar{u}_n| + |\tilde{u}_n| \le \frac{128}{B\theta^3}\max_m |f_m| + \frac{4}{\theta}\max\left(|\varphi|,|\psi|\right) \qquad (30)$$

(30) baholash yaxshi shartlanganlikni ta’minlaydi:

$$|u_n| \le M\max\left(|\varphi|,|\psi|,\max_m |f_m|\right)$$

ISSN 2181-3187

$$M=\frac{128}{B\theta^3}+\frac{4}{\theta}$$

Agar $n>6/\theta, N-n>6/\theta$ bo‘lsa, (23) tengsizlik o‘rniga (24) tengsizlikdan foydalanib, (30) baholashni aniqroq ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$|u_n|\le\frac{128}{B\theta^3}\max_m|f_m|+\frac{1}{5}\max(|\varphi|,|\psi|) \qquad (31)$$

Yoki

$$|u_n|<M_1\max_m|f_m|+\frac{1}{5}\max(|\varphi|,|\psi|) \qquad (31')$$

Zarurlik. Avvalo ta'kidlaymizki, agar (12) shartlari hech qanday musbat θ uchun bajarilmasa, unda xarakteristik tenglama

$$P(q)\equiv a+bq+cq^2=0$$

1. Har ikkala ildiz ham birlikdan kichik:

$$|q_1|<\rho<1 \qquad |q_2|<\rho<1 \quad (32)$$

2. Har ikkala ildiz ham birlikdan katta:

$$|q_1|>\rho>1 \qquad |q_2|>\rho>1 \quad (33)$$

3. Hech bo‘lmaganda bittasi birlikka teng:

$$|q_1|=1 \qquad (34)$$

ISSN 2181-3187

Tartiblangan shartlar (32), (33) va (34) raqamlari bilan mos keladi.

Ko‘rsatamizki, barcha uchta holatda yaxshi shartlilik mavjud emas.

Buni isbotlash uchun uchta holatning har birida shunday $\{u_n\}$ funksiyalarini quramizki, ular quyidagi turdagi masalaning yechimlari bo‘lsin:

$$\left.\begin{aligned} &au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n, 0<n<N \\ &u_0=u_N=0 \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

va shartlar bajarilsin:

$$\max_n |u_n| > M_N \max_m |f_m| \quad (36)$$

(32) holatda, $q_1 \neq q_2$ deb faraz qilib, aniqlik uchun quyidagicha olamiz:

$$u_n = \begin{cases} q_1^n - q_2^n, 0 \le n \le N-1 \\ 0, n = N \end{cases}$$

Shunda

$$\begin{aligned} &\max_n |u_n| \ge |u_1| = |q_1 - q_2| > 0 \\ &a + bq + cq^2 = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Masalaning (35) o‘ng qismi $\{f_n\}$ quyidagicha:

$$f_n = au_{n-1} + bu_n + cu_{n+1} = \begin{cases} 0, agarn \neq N-1 \\ -c\left(q_1^N - q_2^N\right), agarn = N-1 \end{cases}$$

Shundan kelib chiqadi:

$$\max_m |f_m| = |f_{N-1}| \le 2|c|\rho^N \quad (38)$$

(37) va (38) ni solishtirib, (36)-dagi tengsizlikni bajarish uchun quyidagicha olish kerak:

$$M_N = \frac{|q_1 - q_2|}{2|c|\rho^N} = O\left(\frac{1}{\rho^N}\right)$$

(33)-holat (32)-holatga o‘xshashdir.

Agar (34) bajarilsa, unda quyidagicha olamiz:

$$u_n = q_1^n \sin\frac{n\pi}{N} \qquad 0 \le n \le N$$

Shunda, aniq:

$$\max_n |u_n| \ge \frac{1}{2} \qquad (39)$$

$|f_n|$ uchun quyidagi bahoni olamiz:

$$|f_n| = |au_{n-1} + bu_n + cu_{n+1}| =$$
$$= \left|\left(aq_1^{n-1} + bq_1^n + cq_1^{n+1}\right)\sin\frac{n\pi}{N} + aq_1^{n-1}\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{N} - \sin\frac{n\pi}{N}\right) + cq_1^{n+1}\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{N} - \sin\frac{n\pi}{N}\right)\right| =$$
$$= \left|aq_1^{n-1}\left(\sin\frac{(n-1)\pi}{N} - \sin\frac{n\pi}{N}\right) + cq_1^{n+1}\left(\sin\frac{(n+1)\pi}{N} - \sin\frac{n\pi}{N}\right)\right| \le \left(|a| + |c|\right)\frac{\pi}{N}$$

(40)

(39) va (40)-dan quyidagisi kelib chiqadi, tengsizlik (36) quyidagicha bajariladi:

$$M_N = \frac{N}{2\left(|a| + |c|\right)}$$

Shunday qilib, bu yerda yaxshi shartli barqarorlik mavjud emas, agar M ning N dan mustaqilligini tengsizlik (5) talabida tushunsak.

7. Chiziqli tenglamalar tizimi uchun umumiy chegara masalalari

(1)-masala, (2)-masala – ikkinchi tartibli tenglama uchun oddiy chegara masalalari.

Chegara masalalarining yaxshi shartli barqarorligi uchun zarur va yetarli shartlarni dalilsiz shakllantiramiz. Bu masala diskret intervallar uchun tizimlar uchun tegishlidir (V.S. Ryabenkiy, J. V. M. va M. F. 4, 2 (1964)).

Chegara masalasi vektor funksiyalari u_n, $n=0,1,2,3,\ldots,N$ ni qondirish uchun talab qiladi, shundayki:

$$\sum_{k=-k_0}^{k_0} A_{k,n}u_{n+k}=f_n\ , \qquad k_0\le n\le N-k_0 \qquad (1')$$

$$\sum_{i=0}^{2k_0}\alpha_i u_i=\varphi\,, \qquad \sum_{i=0}^{2k_0}\beta_i u_{N-i}=\psi \qquad (2')$$

Bu yerda $A_{k,n}$ — ma’lum tartibli $m\ge 1$ kvadrat matritsalar; u_n, f_n — xuddi shu o‘lchamdagi vektorlar; α_i — m ta ustun va $r\ge 0$ ta qatorli matritsalar; β_i — m ta ustun va $s\ge 0$ ta qatorli matritsalar; φ — berilgan r-o‘lchamli vektor; ψ — berilgan s -o‘lchamli vektor.

Masala $(1')$, $(2')$ yaxshi qo‘yilgan bo‘ladi, agar u u_n yechimiga ega bo‘lsa va bu yechim $\{f_n\},\varphi,\ \psi$ ning ixtiyoriy qiymatlarida quyidagi shartni qanoatlantirsa:

$$\max_n\|u_n\|\le M\ \max\left\{\|\varphi\|,\|\psi\|,\max_j\|f_j\|\right\}$$

Ko‘rsatkichlar $A_{k,n}$ haqida, quyidagini faraz qilamiz:

ISSN 2181-3187

$$A_{k,n} = A_k\left(\frac{n}{N}\right)$$

$$\left\|A_k(x) - A_k(x')\right\| \le D|x - x'|^{\omega} \qquad D > 0 \qquad \omega > 0 \qquad (14')$$

Keyinchalik, faraz qilamiz:

$$d(x) = \max_k \left\|A_k(x)\right\| \ge B > 0$$

Ushbu cheklovlar asosida, masalaning $(1')$, $(2')$ yaxshi qo‘yilgan bo‘lishi uchun, quyidagi har bir shart bajarilishi zarur va yetarlidir:

1° Shart: Tenglamalarning ildizlari μ va ν orasida

$$\det \sum_{k=-k_0}^{k_0} A_k(x)\mu^{k_0+k} = 0$$

$$\det \sum_{k=-k_0}^{k_0} A_k(x)\nu^{k_0-k} = 0$$

Moduli bo‘yicha teng birliklar yo‘q, bunda tenglamalardagi μ va ν ildizlari quyidagi to‘rtta tengsizlikdan har birini qanoatlantiradi:

$$|\mu| < 1 - \frac{\theta}{2}, \qquad |\nu| < 1 - \frac{\theta}{2}$$

$$\left|\mu^{-1}\right| < 1 - \frac{\theta}{2} \qquad \left|\nu^{-1}\right| < 1 - \frac{\theta}{2}$$

bu yerda $\theta > 0$ x ga bog‘liq emas.

ISSN 2181-3187

2° Shart: α_i matritsalarining r o‘lchami, moduli birlikdan kichik bo‘lgan μ ildizlari soniga teng, β_i matritsalarining s o‘lchami esa moduli birlikdan kichik bo‘lgan ν ildizlari soniga teng.

3° Shart: u_n, $n \geq 0$ yechimlari orasida quyidagi masala uchun

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=-k_0}^{k_0} A_k(0)u_{n+k} = 0, k_0 \leq n < \infty \\ &\sum_{i=0}^{2k_0} \alpha_i u_i = 0 \end{aligned}\right\}$$

Va $\{u_n\}$, $n \leq N$ yechimlari orasida quyidagi masala uchun

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=-k_0}^{k_0} A_k(1)u_{n+k} = 0, -\infty < n \leq N - k_0 \\ &\sum_{i=0}^{2k_0} \beta_i u_{N-i} = 0 \end{aligned}\right\}$$

nolga tenglikdan farqli cheklovlar yo‘q.

So‘nggi 3° shartni N ga bog‘liq bo‘lmagan elementlarga ega determinantlarning nolga aylanmasligi shaklida ifodalash mumkin.

Keltirilgan kriteriy asosida yaxshi qo‘yilganlik shartlarini tekshirib, masalani quyidagicha ko‘rib chiqamiz:

$$\left.\begin{aligned} &0 \cdot u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} = f_n, 0 < n < N \\ &u_1 - \alpha u_0 = \varphi, u_N - \beta u_{N-1} = \psi \end{aligned}\right\}$$

bu yerda α va β — ma’lum sonlar; $m=1, r=1, s=1, k_0=1$. Tenglamalar ildizlari quyidagicha:

ISSN 2181-3187

$0-2\mu+\mu^2=0$ va $0\cdot\nu^2-2\nu+1=0$

Ildizlar:

$\mu_1=0,\ \mu_2=2,\ \nu_1=1/2\quad(\nu_2=\infty)$

Ularning orasida moduli bo‘yicha teng birliklar yo‘q, va 1° shart bajarilgan.

2° shart ham bajarilgan, chunki chap va o‘ng chegaralardagi skalyar cheklovlar soni $r=s=1$ va bu moduli birlikdan kichik va ildizlari soniga teng.

Aniqlaymiz, qaysi α qiymatlarida masala:

$$\left.\begin{array}{l}0\cdot u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=0, n\geq 1\\ \alpha u_0-u_1=0\end{array}\right\}$$

to‘g‘ri yechimga ega bo‘ladi.

Cheklanmagan trivial bo‘lmagan yechimlar mavjud emas. Masalaning umumiy yechim ko‘rinishi quyidagicha:

$$0\cdot u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=0,\qquad n>0$$

$$u_n=c_1\mu_1^n+c_2\mu_2^n\quad n\geq 0\qquad \mu_1^n=1$$

$c_2=0$ cheklov shartidan foydalanib quyidagini topamiz:

$$u_n=c_1\mu_1^n=\begin{cases}c_1, agarn=0\\ 0, agarn>0\end{cases}$$

$\alpha u_0-u_1=0$ sharti asosida ko‘ramizki, $\alpha\neq 0$ bo‘lganida trivial bo‘lmagan yechimlar yo‘q, lekin $\alpha=0$ bo‘lganida ular mavjud.

ISSN 2181-3187

Aniqlaymiz, qaysi β qiymatlarida quyidagi masala:

$$\left.\begin{array}{l} 0\cdot u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=0, n<N \\ u_N-\beta u_{N-1}=0 \end{array}\right\}$$

cheklanmagan trivial bo‘lmagan yechimlarga ega emas.

Masalaning umumiy yechimi:

$$0\cdot u_{n-1}-2u_n+u_{n+1}=0, n<N$$

$$u_n=c_1\nu_1^{-n}=c_1\left(1/2\right)^{-n}=c_1 2^n$$

Bu $n\to-\infty$ sharoitida cheklanadi. Chegara shartidan $u_N-\beta u_{N-1}=0$ quyidagini ko‘ramiz:

$$c_1 2^N-\beta c_1 2^{N-1}=c_1 2^{N-1}\left(2-\beta\right)=0$$

Trivial bo‘lmagan yechim, ya’ni , $c_1\neq 0$ faqat $\beta=2$ bo‘lganida mavjud.

Shunday qilib, ko‘rib chiqilayotgan chegaraviy masala $\alpha\neq 0$ va $\beta\neq 0$ har qanday qiymatlarida yaxshi qo‘yilgan bo‘ladi. Agar $\alpha=0$ yoki $\beta=2$, masala yaxshi qo‘yilgan emas.

MASALA

Farqlama chekka masalani quyidagicha yozamiz:

$$\left.\begin{array}{l} au_{n-1}+bu_n+cu_{n+1}=f_n, 0<n<N \\ u_1-\alpha u_1=\varphi, u_N-\beta u_{N-1}=\psi \end{array}\right\}$$

ISSN 2181-3187

Bu masala yaxshi shartlangan deyiladi, agar har bir N uchun yagona yechim mavjud bo‘lsa. Yechim u_n quyidagi shartni qanoatlantirsa: $|u_n| < M \max\left(|\varphi|, |\psi|, \max_m |f_m|\right)$

bu yerda M ning qiymati N ga bog‘liq emas.

Masala

Agar xarakteristik tenglamaning ikkala ildizi q_1 va q_2: $a + bq + cq^2 = 0$ moduli bo‘yicha 1 dan kichik yoki katta bo‘lsa, u holda farqlama chekka masala yaxshi shartlangan bo‘la olmaydi. Isbotlang.

Ushbu masala farqlama chekka shartli masalaning yaxshi shartlanganligini (good conditioning) tahlil qiladi va uning xususiyatlarini o‘rganadi. Keling, masalani bosqichma-bosqich ishlab chiqaylik va tushuntirib beraylik.

Masala yechimi

Farqlama chekka masala quyidagi ko‘rinishda berilgan:

$$\left.\begin{array}{l} au_{n-1} + b + cu_{n+1} = f_n, 0 < n < N \\ u_1 - \alpha u_1 = \varphi, u_N - \beta u_{N-1} = \psi \end{array}\right\}$$

$$\alpha, \beta, \varphi, \psi$$

$$u_n = Aq_1^n + Bq_2^n$$

$$|q_1| > 1$$

Bu yerda:

u_n — noma’lum funksiyaning qiymatlari,

a, b, c — koeffitsiyentlar,

f_n — o‘ng tomon funksiyasi,

$\alpha, \beta, \varphi, \psi$ — chekka shartlarning parametrlari.

Isbot

A) *Masalaning barqarorligi va yaxshi shartlanganligi*

Chekka masalalar yaxshi shartlangan bo‘lishi uchun quyidagi ikkita shart bajarilishi kerak:

Barqarorlik: Yechim kichik o‘zgarishlarga nisbatan sezgir bo‘lmasligi kerak.

Yagonalik: Har qanday *N* uchun yagona yechim bo‘lishi kerak.

Tizimni yechishda quyidagi umumiy yechim ko‘rinishidan foydalaniladi:

$$u_n = Aq_1^n + Bq_2^n$$

Chekka shartlar asosida *A* va *B* qiymatlari aniqlanadi.

B*) Xarakteristik ildizlarning ta’siri*

Agar $|q_1|<1$ va $|q_2|<1$, yoki aksincha $|q_2|>1$ va $|q_1|>1$ bo‘lsa, yechim eksponentsial ravishda o‘sadi yoki kamayadi. Bu esa yechimning barqaror emasligiga olib keladi va kichik o‘zgarishlar katta ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Natijada, masala yaxshi shartlangan bo‘la olmaydi.

Shu sababli, chekka masala yaxshi shartlangan bo‘lishi uchun hech bo‘lmaganda bitta ildizning moduli 1 ga yaqin bo‘lishi yoki ildizlardan biri 1 dan katta, ikkinchisi esa 1 dan kichik bo‘lishi kerak.

Xulosa. Agar $|q_1|<1$ va $|q_2|<1$ yoki $|q_2|>1$ va $|q_1|>1$ bo‘lsa, u holda chekka masala yaxshi shartlangan emas, chunki yechim juda katta yoki juda kichik qiymatlarga ega

ISSN 2181-3187

bo‘lishi mumkin. Masala yaxshi shartlangan bo‘lishi uchun kamida bitta ildiz $|q| \approx 1$ bo‘lishi kerak. Bu natija differensial tenglamalarning raqamli yechimlarida barqarorlik va shartlanganlik muammosi muhimligini ko‘rsatadi.

XULOSA. Ushbu maqolada ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yaxshi sharoitli (barqaror) bo‘lish shartlari tahlil qilindi. Tadqiqot natijalariga ko‘ra, bunday masalalar yagona va barqaror yechimga ega bo‘lishi uchun ma’lum shartlarning bajarilishi zarur ekanligi ko‘rsatildi.

Shuningdek, yechimlarni topish uchun qo‘llaniladigan ayirma sxemalar va ularning konvergensiya xususiyatlari muhokama qilindi. Olingan nazariy natijalar misollar yordamida tasdiqlandi va ulardan amaliy hisoblash ishlarida foydalanish mumkinligi ko‘rsatildi.

Tadqiqot natijalari matematik fizika, muhandislik va hisoblash matematikasi sohalarida qo‘llanilishi mumkin bo‘lib, differensial tenglamalar asosida turli tabiiy va texnik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyatga ega. Kelgusida bu masalalarni yanada chuqurroq o‘rganish va samarali hisoblash algoritmlarini ishlab chiqish maqsadga muvofiqdir.

Quyida ikkinchi tartibli differensial tenglamalar va chegaraviy masalalar bo‘yicha o‘zbekcha va ruscha adabiyotlar ro‘yxati keltirilgan. Ushbu adabiyotlar mavzu bo‘yicha asosiy nazariyani va hisoblash usullarini o‘z ichiga oladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. С.К.Годунов, В.С.Рябенький "Разностные схему (введение в теорию)" 1977
2. Ashurov J.M., Qosimov S.A. "Differensial tenglamalar" – Toshkent: O‘zbekiston Milliy Universiteti nashriyoti, 2015.
3. Ismatullayev G.P., Koshergenova M.S. Hisoblash usullari. — Toshkent: «Tafakkur Bo‘stoni», 2014.
4. Salohiddinov M., Mahmudov N. "Matematik fizika tenglamalari" – Toshkent: O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi, 2010.
5. Raimov B., Jumaniyozov U. "Chegaraviy masalalar va ularning sonli yechimlari" – Toshkent: Fan, 2012.