ANIQ INTEGRAL TATBIQLARI

Farg'ona davlat universiteti katta o'qituvchisi
Ismoilov Axrorjon Ikromjonovich
ismoilovaxrorjon@yandex.com
Farg'ona davlat universiteti 2-kurs talabasi
Abdubannonova O'g'ilxon Akramjon qizi
abdubannonovaogilxon@gmail.com
Farg'ona davlat universiteti 2-kurs talabasi
Soyipova Ominaxon Mirodiljon qizi
Farg'ona davlat universiteti talabasi
soyipovaominaxon@gmail.com

Annotatsiya

Ushbu mavzuda aniq integralning amaliy tatbiqlari o'rganiladi. Xususan, sirt maydonini, jismlar hajmini hisoblash, fizik kattaliklar — masalan, ish, massa markazi, statik moment kabi tushunchalarni integral orqali ifodalash usullari ko'rib chiqiladi. Aniq integral matematik modellashtirishda, texnika, fizika va iqtisodiyot kabi fanlarda keng qo'llaniladi. Mavzu doirasida o'quvchilar real hayotdagi masalalarni matematik shaklga keltirib, integral orqali yechishni o'rganamassa markazi,dilar. Bu esa nafaqat nazariy bilimlarni chuqurlashtiradi, balki ularni amaliyotda qo'llash ko'nikmalarini ham rivojlantiradi.

Kalit so'zlar: aniq integral, integral hisoblash, sirt maydoni, hajm hisoblash, fizik tatbiqlar, statik moment, kuch va energiya, matematik modellashtirish, koordinata o'qlari.

Аннотация

В данной теме изучаются практические применения определённого интеграла. В частности, рассматриваются методы вычисления площади поверхности, объёма тел, а также физические величины — такие как работа, центр массы, статический момент — с использованием определённого интеграла. Определённый интеграл широко используется в математическом моделировании, технике, физике и экономике. В рамках темы учащиеся учатся формулировать реальные задачи в математической форме и решать их с помощью интеграла. Это способствует не только углублению теоретических знаний, но и развитию практических навыков их применения.

Ключевые слова: определённый интеграл, интегральные вычисления, площадь поверхности, вычисление объема, физические приложения, статический момент, сила и энергия, математическое моделирование, координатные оси.

Annotation

This topic explores the practical applications of the definite integral. In particular, it examines methods for calculating surface area, volumes of solids, and physical quantities such as work, center of mass, and static moment using definite integrals. The definite integral is widely used in mathematical modeling, engineering, physics, and economics. Within this topic, students learn to translate real-world problems into mathematical form and solve them using integrals. This not only deepens their theoretical understanding but also enhances their practical application skills.

Keywords: definite integral, integral calculation, surface area, volume calculation, physical applications, static moment, force and energy, mathematical modeling, coordinate axes.

Kattaligi o'zgaruvchan va f(x) funksiya bilan aniqlanadigan kuch moddiy nuqtani [a,b] kesma bo'yicha harakatlantirganda bajarilgan A ish

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

formula bilan hisoblanadi.

Biror o'zgarmas tezlik bilan to'gri chiziq bo'ylab tekis harakat qilayotgan moddiy
nuqtaning [a,b] vaqt oralig'ida bosib o'tgan S masofasi S= v(b-a) formula bilan hisoblanadi.

Tezligi har bir t vaqtda o'zgaruvchan va v=v(t) funksiya bilan aniqlanadigan notekis harakatda moddiy nuqtaning [a,b] vaqt oralig'ida bosib o'tgan s masofasi

$$S = \int_a^b v(t)dt$$

formula bilan aniqlanadi.

Ma'lumki, inersiya momenti tushunchasi mexanikaning muhim tushunchalaridan
biri hisoblanadi. Tekislikda m massaga ega bo'lgan A moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror l o'qqacha (yoki O nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin. U holda $J=mr^2$ miqdor l o'qga (O nuqtaga) nisbatan inersiya momenti deb ataladi

Masalan, tekislikdagi m, massaga ega bo'lgan A=A (x,y) moddiy nuqtaning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x = mx^2, \quad J_y = my^2, \quad J_0 = m(x^2 + y^2)$$

formula orqali hisoblanadi.

Masalan, tekislikda har biri mos ravishda $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$ massaga ega bo'lgan $A_0(x_0, y_0), \ A_1(x_1, y_1), \ \dots, \ A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ moddiy nuqtalar sistemasining koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlari mos ravishda

$$J_x^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k x_k^2, \quad J_y^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k y_k^2, \quad J_0^{(n)} = \sum_{k=o}^{n-1} m_k (x_k^2 + y_k^2)$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Biror y=f(x) egri chiziq yoyi bo'yicha massa tarqatilgan bo'lsin. Bu massali egri chiziq yoyining koordinata o'qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inersiya momentlar

$$J_x = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx, \qquad J_y = \int_a^b f^2(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

formulalar orqali ifodalanadi.

Oxy tekislikda massalari $m_1, m_2, \dots, m_n$ bo'lgan $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \dots, P_n(x_n, y_n)$ material nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsa, u holda, $x_i m_i$ va $y_i m_i$ ko'paytmalar m_i massaning ox va oy o'qlariga nisbatan statik momentlari deyiladi.

Berilgan sistemaning og'irlik markazi koordinatalarini x_c va y_c lar bilan belgilaymiz.U holda, mexanika kursidan ma'lum bo'lgan

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$y_c = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \dots + y_n m_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

formulalarni yozishimiz mumkin.

$y = f(x)\ (a \le x \le b)$ tenglama bilan berilgan AB egri chiziq yoyining og'irlik markazi koordinatalari quyidagi integrallar bilan aniqlanadi.

$$x_c = \frac{\int_a^b x\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

$$y_c = \frac{\int_a^b f(x)\, ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

$y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ x = a,\ x = b$ chiziqlar bilan chegaralangan tekis figura og'irlik markazining koordinatalari

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}, \qquad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}$$

formulalardan topiladi.

$y = f(x)$ funksiya grafigi, $x = a$, $x = b$ ikkita to'g'ri chiziqlar va OX o'qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S = \int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi.

Umumiy hol, ya'ni $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, $f_2(x) \ge f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1 = \int_{x_1}^{x_2} [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (2)$$

aniq integralga teng bo'ladi .

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2 = \int_c^d x\, dy = \int_c^d \varphi(y) dy \qquad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida y=f(x) [a,b] kesmada silliq (ya'ni y=f(x) hosila uzluksiz) bo'lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \qquad (5)$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametric tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi),\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

formula bilan hisoblanadi.

7-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.

Oshkormas funksiya hosilasiga asosan

$\dfrac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} + \dfrac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}} y' = 0$ bundan, $y' = -\dfrac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi

formulasiga asosan,

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \left(\sqrt[3]{y} / \sqrt[3]{x}\right)^2}\, dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\, dx = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx = 4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}} dx = 4\sqrt[3]{a}\, \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = 4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}} - 0\right) = 6a.$$

$y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (7)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y)$, $y = c$, $y = d$, $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy \qquad (8)$$

formula bilan hisoblanadi.

8-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to'g'ri chiziq va OX o'qi bilan chegaralangan figuraning OX o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko'ra x o dan 3 gacha o'zgaradi. Demak,

$$V_x = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi .$$

9-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan

$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ bo'lib, integralning chegaralari $c = -b$, $d = b$ bo'ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi\int_{-b}^{b} a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2\int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 dy = \pi a^2 y\Big|_{-b}^{b} - \pi\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2[b - (-b)] - \pi\frac{a^2}{3b^2}\left[b^3 - (-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$

$a = b = R$ bo'lsa, shar hosil bo'lib $V_{sh} = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo'ladi.

Xulosa qilib aytganda, aniq integral matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning nazariy asoslari hamda amaliy qo‘llanilishi keng ko‘lamli masalalarni hal qilishda muhim o‘rin tutadi. Ushbu ish davomida aniq integralning fizik, geometrik va mexanik tatbiqlari chuqur o‘rganildi. Xususan, yassi figuralarning yuzini hisoblash, egri chiziq yoyining uzunligi, aylanma jismlarning hajmi va yuza maydonini topish kabi masalalarning barchasi aniq integral orqali ifodalanishi mumkinligi ko‘rsatildi. Shuningdek, aniq integralning fizikadagi tatbiqlari — masalan, ishni hisoblash, kuchlarning ta’sirini aniqlash, og‘irlik markazini aniqlash va inersiya momentini hisoblash kabi ko‘plab amaliy masalalarni yechishda asosiy vosita sifatida xizmat qilishi ta’kidlandi. Bu esa aniq integralni nafaqat nazariy jihatdan, balki real hayotdagi texnik va ilmiy masalalarda ham samarali qo‘llash mumkinligini isbotlaydi. Ushbu mavzuni o‘rganish natijasida aniq integralning nafaqat matematik tahlil vositasi, balki turli sohalardagi real muammolarni yechishda muhim metod ekanligi aniqlandi. Bu mavzu bo‘yicha chuqur bilimlarga ega bo‘lish, kelgusida ilmiy tadqiqotlar olib borish va amaliy masalalarni yechishda mustahkam poydevor bo‘lib xizmat qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar :

1. 1.Bellman, R. (1957). Dynamic Programming. Princeton University Press.
2. Bryson, A. E., & Ho, Y. C. (1975). Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. CRC Press.
3. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing (3rd ed.). Cambridge University Press.
4. Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). Numerical Optimization (2nd ed.). Springer.
5. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: NonstiffProblems. Springer-Verlag.